

グラフ理論 試験問題 2018/07/24

問題 1. 次の数列はグラフ的であるかを判定せよ, グラフ的であれば, それを次数列とするグラフを描け. ( $4 \times 5 = 20$ )

- (1) 5,5,5,5,4,4,4,4      (2) 6,5,4,4,3,3,3      (3) 6,6,6,5,4,3,2      (4) 3,3,3,3,3,3,3,3

問題 2. 頂点数 4 以上の任意の平面的グラフは次数 5 以下の頂点を 4 個以上持つことを証明せよ. (10) また, 頂点数が大きく, 次数 5 以下の頂点がちょうど 4 個の平面グラフを構成せよ. (5) さらに, 最小次数 4 以上の場合と最小次数 5 以上の場合, 次数 5 以上の頂点の個数の下界はそれぞれどのようなか. ( $5 \times 2 = 10$ ) (計 25)

問題 3. 以下の問題を解け (各 15 点, やったぶんだけ加算).

A. 次数列が等しいが同型でないグラフで, 頂点数が最小のものを描け.

B.  $K_5$  と  $K_{3,3}$  は平面的でないことを示せ.

C. 頂点数 11 以上の任意のグラフ  $G$  に対して,  $G$  またはその補グラフ  $\bar{G}$  のどちらかは非平面的であることを示せ.

D. 頂点数  $n$  以上の任意のグラフ  $G$  において, どの非隣接 2 頂点の次数の和が  $n$  以上であるとする. このとき,  $G$  は連結であることを証明せよ.

E. 正多面体が 5 種類であることを証明せよ. そして, 各正多面体の辺数を求めよ.

F. 立方体の展開図をすべて求めよ. また, 正八面体の展開図はいくつあるかをその理由とともに答えよ.

問題 4. 本授業で楽しかったこと, また, 授業に関する感想を聞かせてください. (10)