線 形 代 数

慶應義塾大学商学部
中本 敦浩[1]

平成 31 年 12 月 16 日

[1]Email: nakamoto@ynu.ac.jp

目 次

講義について

講義内容：線形代数とは,「現代的な一次方程式の理論」であり,「つるかめ算」で代表される連立一次方程式を一般化したものである．本講義では，ベクトルと行列，そして，連立一次方程式をキーワードに「線形代数」の初歩について学習する．

参考書：「線形代数講義」梶原健著，日本評論社，2500 円（税抜）

授業計画：

第 1 回 イントロダクション

第 2 回 ベクトルと行列

第 3 回 行列の演算

第 4 回 正則行列と逆行列

第 5 回 応用と演習

第 6 回 連立一次方程式 I

第 7 回 連立一次方程式 II

第 8 回 行列の階数と解の自由度

第 9 回 応用と演習

第 10 回 行列式 I

第 11 回 行列式 II

第 12 回 余因子行列

第 13 回 クラーメルの公式

第 14 回 応用と演習

その他 まとめ

試験： 試験期間に行う．

第1章　ベクトル

1.1　ベクトルの定義

実数を縦にいくつか並べて，カギ括弧でくくったものを**ベクトル**という．特に，n 個の数を並べたものを n **次元ベクトル**という．例えば，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

である．ただし，各 x_i は実数であり，**第 i 成分**という．すべての n 次元ベクトルからなる空間を n **次元空間**といい，$\mathbb{R}^n$ と表す．

また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の**大きさ**とは，各成分の 2 乗の和の平方根であり，$|\boldsymbol{x}|$ で表す．特に，次が成り立つ．

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

すべての成分が 0 であるベクトルを**ゼロベクトル**といい，$\mathbf{0}$ で表す.（このとき，$|\mathbf{0}| = 0$ である.）また，大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．

1.2　ベクトルの演算

2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

を考えよう．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が**等しい**，すなわち，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ であるとは，各 i に対して，$a_i = b_i$ が成り立つことである．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和とスカラー倍を次のように定義する．

ベクトルの演算

- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍：k をスカラーとするとき，

$$k\boldsymbol{a}=k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ は xy 平面にそれぞれ，原点 O から点 A(a_1,a_2) まで引いた矢線 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と，原点から点 B(b_1,b_2) まで引いた矢線 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として自然に表現される．このとき，和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は，3 点 O, A, B を含む平行四辺形の 4 番目の点を C とおくと，O を始点として C を終点とする矢線 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に対応する．一方，実数 $k>0$ に対して，$\boldsymbol{a}$ の k 倍は，始点 O を固定して $\boldsymbol{a}$ の大きさを k 倍して得られる矢線 OA' に対応する．図 1.1 参照．

このようにベクトルを平面や空間に幾何学的に表現すると，「ベクトルとは，原点を始点とし，大きさと向きを持った矢線である」と解釈できる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が「同じ向きを持つ」とは，$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ となるスカラー $k>0$ が存在することである．一方，$k<0$ について $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は逆向きである．

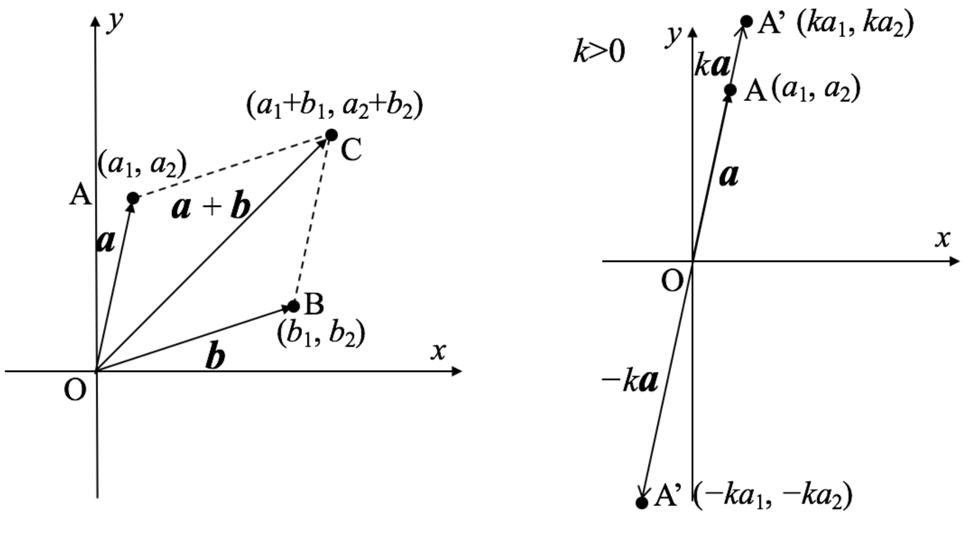

図 1.1: xy 平面にベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との和とスカラー倍

練習 1.1. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ について，次の問いの答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$ と向きが同じ単位ベクトルを求めよ．

1.3 ベクトルの線型独立性

n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ と n 個のスカラー $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，ベクトル

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{x}_1 + x_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1} x_i\boldsymbol{x}_i$$

を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の**線型結合**（または一次結合）という．

ベクトルの線型独立性

n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が**線型独立**である（または，一次独立）とは，n 個のスカラー $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，

$$x_1\boldsymbol{x}_1 + x_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

であれば，

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

が成り立つことである．一方，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が線型独立でないとき，それらを**線型従属**である（または，一次従属）という．

定理 1 ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が線型独立であるとする．ベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の線型結合で表されるならば，その表現は一意的である．つまり，

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + b_n\boldsymbol{x}_n$$

ならば，$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots,\ a_n = b_n$ である．■

練習 1.2. (1) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ は線型独立であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は線型従属であることを示せ．

1.4　ベクトルの内積

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は次のように定義される．

ベクトルの内積

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ に対して，**内積** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は次のように定義される．

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n$$

とくに，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ であるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という．

定理 2 ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次が成り立つ．

(i) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(ii) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

(iii) 実数 t に対して，$(t\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(iv) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

練習 1.3. (1) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} k-1 \\ -3 \end{bmatrix}$ が直交するとき，k の値を求めよ．

経済学において，ベクトルの内積は次のような文脈でも登場する．

3 つの品物 P_1, P_2, P_3 について，1 つあたりの価格がそれぞれ a_1, a_2, a_3 であるとする．そして，ある年，それらが売れた個数はそれぞれ b_1, b_2, b_3 であったとする．このとき，その年の売上総額 I は，$I = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ である．

これは，価格ベクトル $\boldsymbol{a}$ と売上ベクトル $\boldsymbol{b}$ を次のようにおくと

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = I$ である．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ を xy 平面に，原点 O を始点として，それぞれ矢線 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として配置する．図 1.2 左参照．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とおくと，次が成り立つ．

ベクトルの内積の幾何学的定義

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

この式から，大きさが 0 でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するとき（すなわち，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$），$\boldsymbol{a} \neq 0$ かつ $\boldsymbol{b} \neq 0$ より，$\cos\theta = 0$ であることがわかり，$\theta = \frac{\pi}{2}$ である．つまり，文字通り，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交していることがわかる．

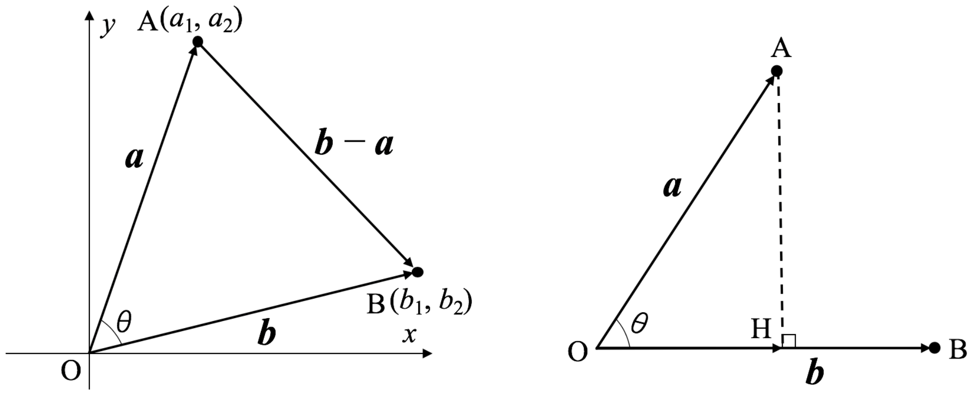

図 1.2: $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積と $\boldsymbol{a}$ の正射影

以下に，内積の公式を示そう．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ であることがわかる．定理 2 の内積の計算により，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2 \\
&= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \\
&= \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \\
&= |\boldsymbol{a}|^2 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 \\
&= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

となる．一方，余弦定理より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

である．この両者を比較することにより，次が得られる：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

点 A から直線 OB に引いた垂線の足を H とおく．ベクトル $\boldsymbol{h} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への**正射影ベクトル**という．図 1.2 右参照．このとき，次が成り立つ：

$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への正射影ベクトル

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\, \boldsymbol{b}$$

これを証明してみよう．正射影ベクトル $\boldsymbol{h}$ について，

$$\boldsymbol{h} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\, \boldsymbol{b} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cos\theta}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\, \boldsymbol{b} = \frac{|\boldsymbol{a}| \cos\theta}{|\boldsymbol{b}|}\, \boldsymbol{b}$$

である．ここで，$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ より，次が成り立つ：

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\, \boldsymbol{b}$$

練習 1.4. 2 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への正射影ベクトル $\boldsymbol{h}$ を求めよ．

第2章　行列

2.1　行列の定義

数を長方形型に並べ，カッコでくくったものを**行列**という．例えば，次のようなものである．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

行列 A を次のようにおこう：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

図 2.1 のように，**行**と**列**を定義する．上から i 番目の行を第 i 行，左から j 番目の列を第 j 列という．行列の各数を**成分**といい，第 i 行と第 j 列に含まれる成分を (i,j) **成分**という．特に，成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を A の**対角成分**という．

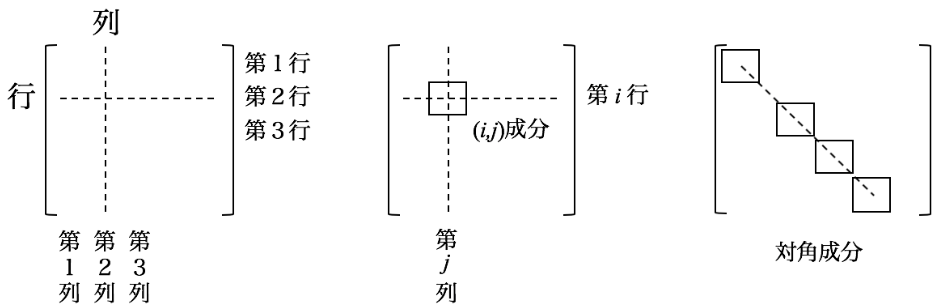

図 2.1: 行列における行と列，成分，および対角成分

行列 A が m 行と n 列からなるとき，A を $m \times n$ 行列といい，$m \times n$ を行列 A の**型**という．特に，$m = n$ のとき，A を**正方行列**という（n 行と n 列からなる行列を n **次正方行列**という）．行列 $A = [a_{ij}]$ と $B = [b_{ij}]$ について，$A = B$ は，A と B の型が等しく，どの i, j についても $a_{ij} = b_{ij}$ であることを意味する．

上の行列 A を次のように解釈することもある：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i1} \\ \boldsymbol{b}_{i2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{in} \end{bmatrix}$$

ただし，$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ を A の**列ベクトル**という（$j = 1, \ldots, n$）．また，$\boldsymbol{b}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ を A の**行ベクトル**という（$i = 1, \ldots, m$）．

いろいろな行列． すべての成分が 0 である行列を**ゼロ行列**といい，O で表す．また，行列 A において，行と列を入れ替えて得られる行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表す．例示すると，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad {}^tA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

また，次の行列も重要である．

- **対角行列** $\cdots\cdots$ 対角成分以外のすべての成分が 0 である正方行列．
- **単位行列** $\cdots\cdots$ 対角成分がすべて 1 の対角行列．n 次単位行列は E_n で表す．

例示すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

その他として，対角成分より下側の成分がすべて 0 である**上三角行列**や，対角成分よりの上の成分がすべて 0 である**下三角行列**などがあげられる．図 2.2 参照．

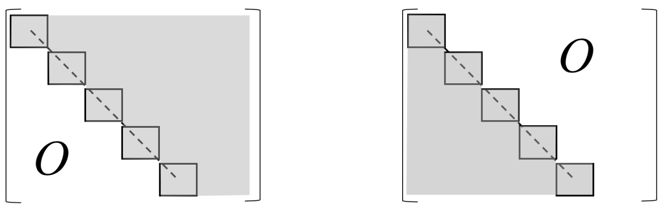

図 2.2: 上三角行列と下三角行列

2.2　行列の演算

まず，行列の和とスカラー倍を定義しよう．

行列の和とスカラー倍

- 行列の和：A と B が $m \times n$ 行列のとき，

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$$

- 行列のスカラー倍（実数倍）： A を行列，k を実数とするとき，

$$kA=k[a_{ij}]=[ka_{ij}]$$

例.

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
- $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

次に積を定義しよう．最初に，2 次正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ のとき，積 AB は次のように定義される：

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$

一般に，行列の積は次のように定義される：

行列の積

$m \times n$ 行列 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ と $n \times l$ 行列 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}$ に対して，積 AB は次のようにして得られる $m \times l$ 行列である：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1l}+\cdots+a_{1n}b_{nl} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1l}+\cdots+a_{2n}b_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1l}+\cdots+a_{mn}b_{nl} \end{bmatrix}$$

AB の (i,j) 成分のみに限定してみると，A の第 i 列ベクトルと B の第 j 列ベクトルの内積になっていることに注意しよう．

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

ここで，行列の積に関して，交換法則が成り立たないことに注意しよう．ただし，結合法則は成り立っている．（練習 2.1 の (2),(3) などを参照せよ．）

- A を $m \times n$ 行列とするとき，m 次単位行列 E_m と n 次単位行列 E_n に対して，次が成り立つ．
$$A = E_m A = A E_n$$
- 次のように 2×3 行列と 3×4 行列の積は 2×4 行列である．
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$
- 次の連立一次方程式は行列の積を用いて表せる：
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

練習 2.1

(1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，$A+B$, $A-B$ を求めよ．また，$3A - 2B + X = O$ を満たす行列 X を求めよ．

(2) $A = \begin{bmatrix} 100 & 10 & 1 \\ -100 & -10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ とするとき，AB, BA, ${}^tA{}^tB$ を求めよ．

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，AB, BA を求めよ．また，$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき，$(AB)C = A(BC)$ を確認せよ．

(4) $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ のとき，AB を求めよ．

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，A^n を求めよ．

2.3 正則行列と逆行列

正則行列と逆行列

n 次正方行列 A に対して，

$$AX = XA = E_n$$

を満たす n 次正則行列 X が存在するとき，A は**正則**であるという．（ただし，E_n は n 次単位行列である．）このときの X を A の**逆行列**といい，$X = A^{-1}$ と表す．

A の逆行列の定義では，$AX = XA = I$ を満たす X としているが，実際は $AX = E$ から $XA = E$ が導ける．

$\because$ $AX = E$ とする．このとき，$XA = E$ を示そう．$AX = E$ に右から A をかけると，$(AX)A = EA = A$ である．結合法則より，$(AX)A = A(XA)$ であるから，$A(XA) = A$ となる．ゆえに，XA は単位行列となり，$XA = E$ である．

また，逆行列について，次の事実が成立する：

- A と B が正則であるとき，AB も正則である．また，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ．（$\because$ $ABB^{-1}A^{-1} = E$ であるから，$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$ である．）
- A が正則であるとき，A^{-1} も正則である．すなわち，$(A^{-1})^{-1} = A$．（$\because$ $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ である．これにおいて，A^{-1} から A を眺めよ．）

逆行列の求め方． まず，2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列を求めてみよう．この行列 A と $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ を用いて，次の連立方程式を作る：

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \iff \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

A が正則のとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

であるから，$\boldsymbol{x}$ を求め，それを 2 次正方行列と $\boldsymbol{b}$ との積で表すことにより，A^{-1} を求めよう．連立方程式を解くと，$ad - bc \neq 0$ のとき，

$$x = \frac{1}{ad - bc}(dp - bq), \qquad y = \frac{1}{ad - bc}(-cp + aq)$$

である．これを行列に直すと，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

となるから，次を得る：

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

一方，$ad-bc=0$ であるとき，A は正則ではなく，逆行列を持たない．

2次正方行列の逆行列

> 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は，$ad-bc \neq 0$ が成り立つことである．また，A が正則のとき，A の逆行列 A^{-1} は以下のようになる：
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

この時点では，正方行列 A の次数が3以上のときの逆行列の公式を与えにくいが，それらは次のようにして求めることができる.（行列式を習えば逆行列の一般公式も得られる.）

ここでは，$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，$A^{-1} = \dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ であることを導こう.

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ について解こう．ただし，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ である．また，便宜上，右辺には単位行列 E をかけ，$A\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{b}$ としておく．

$$\begin{cases} 2x & + & 1y & = & 1p & + & 0q \\ 1x & - & 1y & = & 0p & + & 1q \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

連立方程式を加減法で解くと，右のようになる．左では係数のみを拾うことにする．

$$\begin{cases} 2x & + & 1y & = & 1p & + & 0q \\ 1x & - & 1y & = & 0p & + & 1q \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{cases} 3x & + & 0y & = & 1p & + & 1q \\ 1x & - & 1y & = & 0p & + & 1q \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{cases} 1x & + & 0y & = & \frac{1}{3}p & + & \frac{1}{3}q \\ 1x & - & 1y & = & 0p & + & 1q \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{cases} 1x & + & 0y & = & \frac{1}{3}p & + & \frac{1}{3}q \\ 0x & - & 1y & = & -\frac{1}{3}p & + & \frac{2}{3}q \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$
\to \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 1x & + & 0y & = & \frac{1}{3}p & + & \frac{1}{3}q \\ 0x & + & 1y & = & \frac{1}{3}p & - & \frac{2}{3}q \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right]
$$

縦線で仕切られた行列の右部分に目標の逆行列が得られている．なぜなら，直前の等式は

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}
$$

であることを示しており，それを $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ と比較してみると，

$$
A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

であることがわかる．

まとめると，n 次正方行列 A の逆行列は以下の手順で求めることができる．行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ を例に説明してみよう．

(1) 行列 $[A|E_n]$ を考える．例えば，

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right].
$$

(2) この $n \times 2n$ 行列に対して，縦線で仕切られた左部分が単位行列になるまで，以下の 3 つの変形を繰り返す：

 (a) 1 つの行を k 倍する．

 (b) 1 つの行を別の行に加える．

 (c) 2 つの行を入れ替える．

(3) 行列 $[E_n|B]$ に変形できたら，B が求めるべき A の逆行列である．例えば，

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right].
$$

すなわち，次のようになる：

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

左部分が単位行列に変形できなければ，A は正則ではなく，逆行列を持たない．

例. 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (3)\ \begin{bmatrix} 3 & -6 & 10 \\ 3 & -5 & 11 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

解答.

$$(1)\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$(2)\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{21} \end{array}\right] \to \text{逆行列はない}$$

$$(3)\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -6 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 7 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 2 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

練習 2.2. 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4)\ \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

第3章　行列の基本変形と連立方程式

3.1　行列の基本変形と一次独立性

連立方程式と掃き出し法

行列の基本変形

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ から新しい $m \times n$ 行列 A' を作る次の 3 つの操作を**行基本変形**という．図 3.1 参照．

(1)　（スカラー倍）ある 1 つの行を k 倍する．

(2)　（和）第 i 行を第 j 行に加えて，第 j 行を書き替える．

(3)　（入れ替え）第 i 行と第 j 行を交換する．

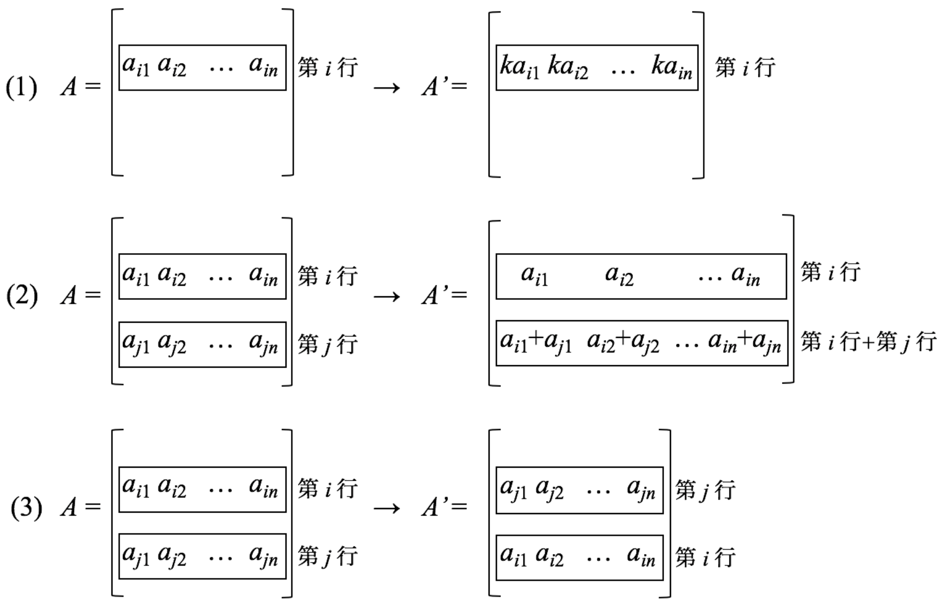

図 3.1: 行基本変形

行基本変形は前章で扱った逆行列の求め方にも登場していた．この章では，行基本変形により，与えられた行列をある基本形に変形することを扱う．

2 元連立一次方程式の行列を用いた解法を考えよう．

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x = 12 \\ x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 4 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

左は連立方程式を加減法で解いており，$(x, y) = (3, 5)$ という解を得ている．一方，右が対応する行列になっており，上から下に進む時，3 つの基本変形のいずれかを行なっていることがわかる．そして，単位行列の右の部分に解が現れていることがわかる．

例. 次の 3 元連立一次方程式を行列における行基本変形を用いて解いてみよう．

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ -x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

解法.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

したがって，解 $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ を得る．

上記の連立方程式の解法では，3×4 行列に基本変形を適用している．特に，最初の変形では $(1, 1)$ 成分の「1」を利用して，$(2, 1)$ 成分と $(3, 1)$ 成分を 0 にしている．この最左の 1 は**要**（かなめ）と呼ばれ，以降，重要な役割を果たすことになる．この手順を「$(1, 1)$ 成分を要として掃き出した」といい，このようにある成分を利用して 0 を作り出す方法を**掃き出し法**という．例えば，次の行列に繰り返し，掃き出し法を適用してみよう．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

既約行階段形

与えられた行列に行基本変形を繰り返しながら，なるべく単純な形に変形していくことを学習する．そのための基本形を次のように定義する：

> **既約行階段形**
>
> 次の条件を満たす行列を**既約行階段形**であるという．図 3.2 参照.
>
> - 各行はすべて 0 であるか，そうでなければ最左の 0 でない成分（**要**）は 1.
> - 1 行下にずれると，要は 1 つ以上右にずれる.
> - 要を含む列において，要以外の成分はすべて 0 である.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ & & & 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ & & & & & & 1 & 0 & * \\ & & & & & & & 1 & * \\ & O & & & & & & & \end{bmatrix}$$

図 3.2: 既約行階段形（要は丸で囲まれている）

定理 3 掃き出し法を用いることにより，任意の行列は既約行階段形に一意的に変形される.

行列 A の既約行階段形における要の個数を A の**階数**といい，rank A と書く．既約行階段形は一意的に定まるので，A の階数も一意的に定まることに注意しよう.

例. 次の行列の既約行階段形と階数を求めよ.

$$(1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ -7 & -4 & -10 & -5 \\ -3 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (3)\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

解 次のようにして求めることができる．以下の計算により，階数はすべて 3 である.

$$(1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ -7 & -4 & -10 & -5 \\ -3 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

逆行列を持たない正方行列.

前章では，与えられた n 次正方行列 A に対して，A^{-1} を求めるための方法を紹介した．その方法では，A の右に単位行列をおいた $n \times 2n$ 行列において，A が単位行列 E_n になるまで，行基本変形を繰り返すというものであった．そして，A が E_n に変形できる場合，A は逆行列 A^{-1} をもち，そうでない場合，A は逆行列 A^{-1} を持たないと述べた．この説では，n 次正方行列 A が単位行列 E_n になるためことと，A の階数が n であることが同値であることを学習した．したがって，これらを組み合わせると，次がわかる：

「n 次正方行列 A が逆行列を持つための必要十分条件は，A の階数が n である」

行列の基本形とベクトルの一次独立性

問. 3 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は一次独立であるか.

この問題を解くには，第 1.3 節で学んだように，$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$，すなわち，

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を解き，$a = b = c = 0$ という解が得られるかどうかを判定すればよい．

一方，直前では，連立方程式を行列の基本変形を用いて解いた．これらを組合せると，問の 3 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が一次独立となるためには，行列と基本変形により，次のようになればよい．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

上で基本変形を繰り返す過程において，第 4 列はいつでもゼロベクトルであるから，第 4 列を除いた 3×3 行列について，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となればよく，階数が 3 になるかを見ればよい．

この行列を $A = [\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}]$ とおき，その方針で解いてみよう．

$$A = [\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上のように， A の階数は 3 であるから，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ は一次独立である．

一般に，以下の定理が成り立つ．

定理 4 n 個の m 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は，$m\times n$ 行列 $A=[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n]$ の階数が n であることである．

問. ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$ は一次独立であるかを判定せよ．

解答.

$$[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}]=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&0&2\\0&-1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

階数は 2 であるから，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ は一次独立ではない．

練習 3.1 次の連立一次方程式を行列と行基本形を用いて解け．

(1) $\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+5y+3z=13\\x+8z=-5\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-2y+2z=1\\-2x+2y+z=-2\\2x+y-2z=2\end{cases}$

練習 3.2 次の行列の既約行階段形と階数を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}1&2&2&0&3\\1&2&3&1&2\\2&4&6&2&7\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\3&1&2&0&5\\-2&-12&10&-7&5\\5&21&-16&1&16\end{bmatrix}$

練習 3.3 次のベクトルは一次独立であるかを，行列と行基本変形を用いて判定せよ．

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\-5\\8\end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$

練習 3.4 行列 $A=\begin{bmatrix}x&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{bmatrix}$ の階数を求めよ．ただし，x は実数である．

3.2　基本変形による連立方程式の解法

次の連立方程式 (X) を解いてみよう．

$$(X)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & & & = & 3 & \cdots\cdots ① \\ -x & & & + & z & = & -1 & \cdots\cdots ② \\ -2x & - & y & + & 2z & = & -4 & \cdots\cdots ③ \end{array}\right.$$

①が x, y の関係式だから，②と③から z を消去して，それぞれ x と y の 2 つの関係式①と④を得る．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & = & 3 & \cdots\cdots ① \\ & & -y & = & -2 & \cdots\cdots ④ \end{array}\right.$$

①と④より，$y = 2, x = 1$ であり，これを②に代入すると，$z = 0$ を得る．したがって，連立方程式 (X) の解 $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ を得る．

一方，同じ連立方程式 (X) を行列の基本変形により解こう．特に，連立方程式

$$(X)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 3 \\ -x & & & + & z & = & -1 \\ -2x & - & y & + & 2z & = & -4 \end{array}\right.$$

において，次の 2 つの行列は，左が連立方程式 (X) の左辺の文字の係数のみを拾って作った行列であり，右はそれに右辺の値も追加して得られたものである：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

前者を**係数行列**といい，後者を**拡大係数行列**と呼ぶ．

連立方程式は拡大係数行列に基本変形を適用することで解くことができる．この解法のメリットとして，方程式 (X) の ①, ②, ③ から「同じ文字を消去して」同一の 2 変数の連立方程式を得るという煩わしさから解放されるということがある．

行列の基本変形による解き方

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ゆえに，解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ を得る．

この方法では，前節で学習した「既約行階段形」が解を示すことに注意しよう．この節では，連立方程式を行列を用いて解く方法にさらに学ぶことにする．

問． 次の連立方程式を解いてみよう．そして，冒頭の問題とは違う状況が起こることを確認しよう．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & & & = & 2 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

これを連立方程式を用いて解くと，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

既約行階段形を作ってみたが，階段形がうまく作れないことに注意しよう．この形から直接的に解を作ることができないが，無理に解を作ると以下のようになる．行列の基本変形の最終形は

$$\begin{cases} x \quad\quad - \ z = 1 \\ \quad\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

を表しているので，$z = t$ とおくと，$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t \end{cases}$ である．すなわち，t を任意の実数として，次を得る：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

以下に，階段形がうまく作れない場合，既約行階段形から解を作る方法を紹介する．

解の作り方

本来 1 が残って欲しい場所に $\boxed{\text{-1}}$ を置く．そして，$\boxed{\text{-1}}$ を含む列を実数倍すると，解を作ることができる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

理由を説明すると，以下のようになる.（行列に $\boxed{\text{-1}}$ を置くことは，最終行に $z - z = 0$ を置くことに対応している．そして，2 つめの z を t と置くと目標の解を得る.）

$$\begin{cases} x \quad\quad - \ z = 1 \\ \quad\ y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \quad\quad - \ z = 1 \\ \quad\ y + 2z = 0 \\ \quad\ z - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

問. 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x + 2y \quad\quad + 3w = 4 \\ \quad\quad\quad\ z + 5w = 6 \end{cases}$$

解答. この方程式から拡大係数行列を作ると，以下のものが得られ，すでに既約行階段形であることがわかる．したがって，ここから上で述べた手順で解を作ると，次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし，s, t は任意の実数である．

練習 3.5 次の連立方程式を解け.

(1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$

(2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

(3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & 8 \\ -x & - & y & + & 2z & - & w & = & -6 \\ 3x & - & y & + & z & + & w & = & 1 \end{array}\right.$

(4) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & - & 10w & = & 6 \\ 3x & + & 6y & + & z & - & 17w & = & 13 \\ 2x & + & 4y & + & z & - & 12w & = & 8 \end{array}\right.$

(5) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & - & 3w & + & 2v & = & 1 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & + & 2w & - & v & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 3z & + & 5w & - & 3v & = & 1 \\ 4x & + & 8y & + & 5z & - & w & + & v & = & 3 \end{array}\right.$

3.3 連立方程式が解を持つ条件

例 1. 連立方程式 $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right.$ を行列で解くと，以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ゆえに，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

また，次の連立方程式も解いてみよう.

例 2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & -8 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ & & \boxed{-1} & \end{bmatrix}$$

ゆえに，t を任意の実数とするとき，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

解が存在するための条件.

例 2 を少々変形した問題を考えよう. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & \underline{-1} \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$

行列の基本変形を用いて解くと，以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

最後の行列の第 3 行は $0 = 1$ を意味しており，連立方程式が解を持たないことを意味している. これは，次に見るように，例 2 の連立方程式の係数行列と拡大係数行列の階数が異なることによることがわかる.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般に，次の事実が成り立つ.

解の存在条件

定理 5 連立一次方程式が解を持つための必要十分条件は，その係数行列と拡大係数行列が等しい階数を持つことである.

また，連立方程式において，

$$\text{変数の個数} \quad = \quad \text{係数行列の階数} \quad = \quad \text{拡大係数行列の階数}$$

が成り立つとき，連立方程式はただ 1 つの解を持つことがわかるだろう.

次のような形の連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

すなわち，すべての等式の定数部分が 0 となっている連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を**同次連立一次方程式**（または**斉次連立一次方程式**）という．

同次連立方程式は，必ず，**自明な解** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つことがわかる．また，同次連立方程式においては，係数行列と拡大係数行列の階数は常に等しくなり，定理 5 より，必ず解を持つことわかる．さらに，同次連立一次方程式において，変数の個数と係数行列の階数が一致すれば，その解は自明な解のみになる．

基本解と一般解.

例 3. 連立方程式 (X) $\begin{cases} x - 3y + 3w = 1 \\ z + 2w = 3 \end{cases}$ を行列を用いて表現すると，その拡大係数行列はすでに既約行階段形だから，(X) の解は，s, t を任意の実数として，次のように書ける．

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

このとき，得られた解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ は (X) の**一般解**という．また，$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ を (X) の**基本解**といい，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ を**特殊解**という．ここで注意すべきは，特殊解は必ずその連立方程式の解になるが，基本解は一般には解ではないことである．一方，同次連立一次方程式では各基本解もその方程式の解になっている．

したがって，連立一次方程式が解（一般解）を持つとき，

$$\text{連立方程式の一般解} \quad = \quad \text{基本解の一次結合} \quad + \quad \text{特殊解}$$

であることがわかる．そして，同次連立一次方程式においては，特殊解は必ず零ベクトルである．

また，このとき，例 1 と例 2 での考察から，次のことがわかる．

基本解の個数と係数行列の階数の関係

$$\text{連立方程式の変数の個数} \quad = \quad \text{係数行列の階数} \quad + \quad \text{基本解の個数}$$

一般解における基本解の個数をその解の**自由度**という．解のなす空間を**解空間**といい，解空間の**次元**とは解の自由度である．解の自由度と解空間について，以下のようにまとめられる：

解の自由度		解		解空間
0	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0}$ （ただ 1 つの解）	$\Longleftrightarrow$	点
1	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0} + a_1\boldsymbol{a_1}$	$\Longleftrightarrow$	直線
2	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0} + a_1\boldsymbol{a_1} + a_2\boldsymbol{a_2}$	$\Longleftrightarrow$	平面
3	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0} + a_1\boldsymbol{a_1} + a_2\boldsymbol{a_2} + a_3\boldsymbol{a_3}$	$\Longleftrightarrow$	空間

問. 次の連立方程式の解空間が直線になるように定数 a, b の値を定め，そのときの解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & & & = & -5 \\ & & -3y & + & 3z & = & -6 \\ -x & + & (a+1)y & + & az & = & b \end{array}\right.$$

解答. 行列の基本変形を用いると，以下のようになる：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ -1 & a+1 & a & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & a+2 & a & b+5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a+2 & a & b+5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+2 & b-2a+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+2 & b-2a+1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

方程式が解を持つためには係数行列と拡大係数行列の階数が一致しなければならない．また，解空間が直線になる（解の自由度が 1）には，それら両者の階数は 2 にならなければならない．したがって，$2a+2=0$ かつ $b-2a+1=0$ を得る．これを解くと，$a=-1, b=-3$ である．

また，そのときの解は，t を任意の実数とするとき，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

練習 3.6 次の同次連立一次方程式を解け.

$$(1) \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(2) \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

練習 3.7 次の連立一次方程式は解を持つか.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ x & + & 5y & - & 7z & = & 1 \end{array}\right.$$

練習 3.8. 次の連立方程式が解を持つように定数 a, b の値を定め，そのときの解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & 2z & - & w & = & a \\ x & + & y & + & 5z & - & w & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2w & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 3z & - & 3w & = & b \end{array}\right.$$

第4章　行列式

4.1　行列式の定義

この説では，正方行列から定まる行列式と呼ばれる値を扱い，その有用性を述べたい．まずは，その定義を与える．

$1, 2, \ldots, n$ を並べたもの $\pi : i_1 i_2 \ldots i_n$ を**順列**という．π において，i_a と i_b が，$a < b$ かつ $i_a > i_b$ を満たすとき，これらを**転倒**という．π における転倒の数が偶数のとき，π を**偶順列**といい，奇数のとき，**奇順列**という．例えば，$\{1, 2, 3\}$ の順列 $\pi = 312$ において，転倒は $3, 1$ と $3, 2$ の 2 つであるから，順列 π は偶順列である．一方，$\pi = 132$ は $3, 2$ のみが転倒であり，奇順列である．さらに，転倒数の偶奇性は次のように考えてもよい.「与えられた順列は，隣り合う数の入れ替えを何回やれば元に戻るか」例えば，$\pi = 312 \to 132 \to 123$ であるから，π は偶順列である．

$\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列 $\pi = i_1 i_2 \ldots i_n$ の**符号**とは $\mathrm{sgn}(\pi)$ と表し，次のように定義される：

$$\mathrm{sgn}(\pi) \quad = \quad \mathrm{sgn}(i_1 i_2 \ldots i_n) \quad = \quad \begin{cases} \ \ 1 & (\pi \ : \ \text{偶順列}) \\ -1 & (\pi \ : \ \text{奇順列}) \end{cases}$$

行列式の定義

n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ の**行列式**とは，$|A|$ または $\det A$ と表し，次のように定義される．

$$|A| \ = \ \det A \ = \sum_{\pi = i_1 i_2 \cdots i_n} \mathrm{sgn}(\pi) \ \ a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

注意. 順列 π について，$\pi(k) = i_k$ となるとするとき，この置換の逆写像 π^{-1} も $1, \ldots, n$ の順列になっている．そのことから，上の行列式の定義は，

$$|A| \ = \ \det A \ = \sum_{\pi^{-1} = j_1 j_2 \cdots j_n} \mathrm{sgn}(\pi^{-1}) \ \ a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

と一致する．すなわち，A の転置行列 ${}^tA$ について，$|A| = |{}^tA|$ が成り立つ．

例. $n = 1, 2$ のとき，行列式の公式を作ってみよう．

(1) 2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の行列式を求めてみよう．$\{1, 2\}$ の順列は $\pi = 12, 21$ であり，順に，偶順列と奇順列だから，

$$|A| = a_{1\underline{1}} a_{2\underline{2}} - a_{1\underline{2}} a_{2\underline{1}}$$

(2) 3 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ の行列式を求めてみよう．$\{1,2,3\}$ の順列は $\pi = 123, 132, 213, 231, 312, 321$ であり，順に，偶，奇，奇，偶，偶，奇であるから，順に足すことにより，

$$|A| = a_{1\underline{1}}a_{2\underline{2}}a_{3\underline{3}} - a_{1\underline{1}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{2}} - a_{1\underline{2}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{3}} + a_{1\underline{2}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{1}} + a_{1\underline{3}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{2}} - a_{1\underline{3}}a_{2\underline{2}}a_{3\underline{1}}$$

また，$n = 2, 3$ のときには行列式の公式が図 4.1 にように表現できる．これを**サラスの方法**という．しかしながら，$n \geq 4$ の場合，行列式の公式にこのような表現はない．

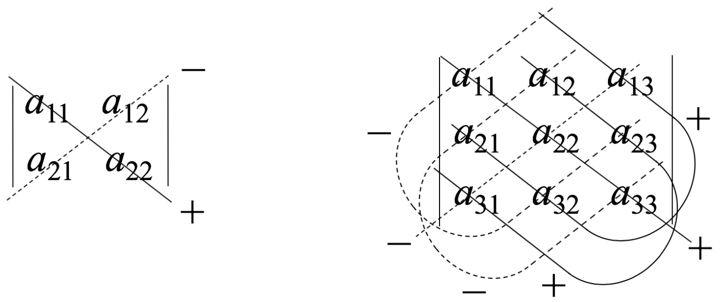

図 4.1: サラスの方法

例. 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 20 - 630 + 24 + 6 = 110$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

行列式の幾何学的意味. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ のなす角を θ とおき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めてみよう.（図 4.2 左参照.）

内積の定義から，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = ac + bd$ であり，$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{c^2 + d^2}$ であるから，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

ゆえに，$0 \leq 0 \leq \pi$ だから，

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}.$$

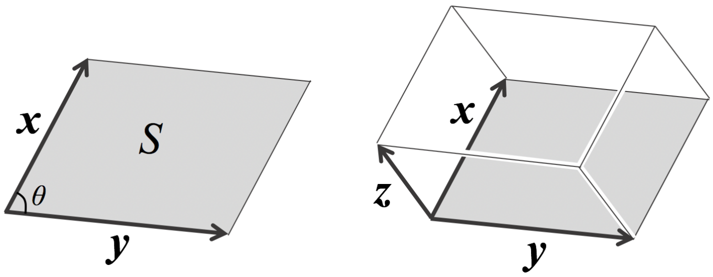

図 4.2: 平行四辺形と平行六面体

したがって，ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で張る三角形の面積 S' は次のようになる：

$$
\begin{aligned}
S' &= \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{1-\frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2} \\
&= \frac{1}{2}|ad-bc|
\end{aligned}
$$

ゆえに，$S = 2S'$ より，$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ の行列式 $|A| = ad - bc$ の絶対値は，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．また，$|A| = |{}^tA|$ より，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の面積にも等しい．

行列式の幾何学的意味

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して，$|A|$ の絶対値はベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．(図 4.2 左参照．)
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ に対して，$|A|$ の絶対値はベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ の張る平行六面体の体積に等しい．(図 4.2 右参照．)

練習 4.1

(1) ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ．

(2) ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ が張る平行六面体の体積を求めよ．

(3) ベクトル $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$ が同一平面上にあるとき，実数 t の値を求めよ．

行列式の基本的性質． ここでは，行列式の基本的性質を整理しよう．

正方行列 A について，A の転置行列 ${}^tA$ について，$|A| = |{}^tA|$ である．以下は，行列の式に性質について，行に関する操作についての観察のみを記述しているが，列についても同様の事実が成り立つことに注意しよう．

行列式の基本的性質

(1) （零ベクトル）ある行が零ベクトルならば，行列式の値は 0 である．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(2) （行の k 倍）ある行ベクトルを k 倍すれば，行列式は k 倍される．

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & \cdots & ka_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

(3) （行の入れ替え）ある 2 つの行を入れ替えると，行列式は -1 倍される．

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

(4) （同一の行）2 つの行に同一のベクトルが入れば，行列式は 0 である．

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0$$

(5) （分配法則）ある行が 2 つのベクトルの和であるとき，行列式の和に分配できる．

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

次のようにして，上の (5), (2), (3) を順に適用することにより,「ある行に別の行の k 倍を加えても行列式が変わらない」ことがわかる．

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & \cdots & b_n+ka_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

練習 4.2. 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよう．

$$(1)\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b^2 & b & c^2 \\ b & 1 & c \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \qquad (3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

注意. 行列の既約行階段形や階数を求めるための 3 種類の行基本変形

1. ある行の k 倍，　2. i 行を j 行に加える，　3. 2 つの行の入れ替え

は，正方行列の行列式の値を変えてしまうことに注意しよう.（1. は行列式の値を k 倍し，3. は -1 倍する．2. は行列式を変えない.）しかしながら，この 2 つの変形は「行列式の値がゼロがどうか」という性質は保存している．この事実から，次の命題が成り立つ．

正方行列の階数と行列式

n 次正方行列 A について，

(a) rank $A = n$ $\iff$ (b) A が正則 $\iff$ (c) $|A| \neq 0$

4.2 余因子展開

前節では，n 次正方行列について,「行列式」を定義し，そして基本的な性質を学習した．$n \leq 3$ であれば，サラスの方法により，行列式の計算は容易にできるが，≥ 4 については，定義に基づいて計算しなければならないのか．ここでは，$n \geq 4$ の正方行列についても行列式を簡単に計算するための方法を学び，さらにその有用性に触れる．

n 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

について，第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列の行列式を A_{ij} と表す．また，A の**余因子**を次のように定義する：

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

例. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ のとき，以下のようになる：

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6 \\ \tilde{A}_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = 6 \end{aligned}$$

以下のように，行列式は余因子を用いて展開される：

余因子展開 ①

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について，第 i 行において展開すると

$$|A| = a_{i1}\tilde{A}_{i1} + a_{i2}\tilde{A}_{i2} + \cdots a_{in}\tilde{A}_{in}$$

が得られる．また，第 j 列で展開すると以下のようになる：

$$|A| = a_{1j}\tilde{A}_{1j} + a_{2j}\tilde{A}_{2j} + \cdots a_{nj}\tilde{A}_{nj}$$

例えば，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ について，a_{11}, a_{12}, a_{13} でまとめると，

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であり，第 1 行での展開になっている．

一般に，n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$ の第 k 行の余因子展開について考えてみよう．

定義に基づいた $|A|$ の展開において，a_{k1} を含む各項は

$$a_{1\ i_1}a_{2\ i_2}\cdots a_{k-1\ i_{k-1}} \quad a_{k\ 1} \quad a_{k+1\ i_{k+1}}\cdots a_{n\ i_n}$$

であり，$\{2, \ldots, n\}$ の順列 π' をすべて動かして得られるもの全体となっている．ここで，π' に対応する $\{1, \ldots, n\}$ の順列 π は，π' の k 番目に "1" を挿入して得られるので，$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{1+k}\mathrm{sgn}(\pi')$ である．したがって，a_{k1} を含む各項の和は

$$(-1)^{1+k}a_{k1}\sum_{\pi'}\mathrm{sgn}(\pi')a_{1\ i_1}a_{2\ i_2}\cdots a_{k-1\ i_{k-1}}\ a_{k+1\ i_{k+1}}\cdots a_{n\ i_n} \ = \ (-1)^{1+k}a_{k1}A_{k1} \ = \ a_{k1}\tilde{A}_{k1}$$

同様に考えると，

$$|A| = a_{k1}\tilde{A}_{k1} + a_{k2}\tilde{A}_{k2} + \cdots + a_{kn}\tilde{A}_{kn}$$

であり，第 1 行での $|A|$ の余因子展開が得られる．

ここで，n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ について，次の式を考えてみよう．

$$(*)=a_{11}\tilde{A}_{21}+a_{12}\tilde{A}_{22}+\cdots+a_{1n}\tilde{A}_{2n}$$

つまり，a_{ij} に関して第 1 列から選ばれているのに対して，$\tilde{A}_{ij}$ に関しては第 2 列から選ばれている．$(*)$ は $|A|$ の展開において，a_{2j} に a_{1j} を代入したものに他ならないので，次を得る：

$$(*)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

一般に，次が成り立つ：

余因子展開 ②

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ について，

$$a_{i1}\tilde{A}_{j1}+a_{i2}\tilde{A}_{j2}+\cdots a_{in}\tilde{A}_{jn}=\begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

$$a_{1i}\tilde{A}_{1j}+a_{2i}\tilde{A}_{2j}+\cdots a_{ni}\tilde{A}_{nj}=\begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

例． 次の行列式の値を計算してみよう．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=2-0=2$

行列式を不変とする基本変形を用いて 0 を増やした後に余因子展開してもよい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1-(-1)=2$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$$=-(5+14+80-10-20-28)=-41$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

$$(4)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 3 & 3 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 9 & -3 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 38 & 31 \\ -1 & 8 & 5 \\ 0 & 69 & 59 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 38 & 31 \\ 69 & 59 \end{vmatrix} = 103$$

$$(5)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 36 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 36 \cdot 4 \cdot \tfrac{25}{2} = 1800$$

4.3 余因子行列

n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して，次の n 次正方行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{n1} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{1n} & \tilde{A}_{2n} & \cdots & \tilde{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

を A の**余因子行列**という．

余因子展開 ②を用いると，

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{n1} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{1n} & \tilde{A}_{2n} & \cdots & \tilde{A}_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |A| & & & \text{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & |A| \end{bmatrix} = |A|E_n \end{aligned}$$

ただし，E_n は n 次単位行列である．これにより，$|A| \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

が得られ，新たな逆行列の公式を得る．

逆行列の公式

n 次正方行列 A について，$\tilde{A}$ を A の余因子行列とする．このとき，A の逆行列 A^{-1} は次のように表すことができる（ただし，E_n は n 次単位行列である）．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

例. 次の正方行列の余因子行列と逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

解答. (1) 各余因子は，$\tilde{A}_{11} = 2$, $\tilde{A}_{12} = -(-1)$, $\tilde{A}_{21} = -1$ となる．また，$\tilde{A}_{22} = 1$ より，

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である．一方，$|A| = 2 - (-1) = 3$ より，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 各余因子は次のようになり，

$$\tilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad \tilde{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad \tilde{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\tilde{A}_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad \tilde{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad \tilde{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{A}_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \tilde{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \tilde{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

ゆえに，余因子行列 $\tilde{A}$ を得る：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

一方，$|A| = 3 - 4 - 1 - 2 + 6 + 1 = 3$ より，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

練習 4.3 次の行列の余因子行列と逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

4.4 クラーメルの公式

ここでは，前節で学習した逆行列の公式を用いて，行列式のみで連立方程式を解く方法を学ぶ．

次の連立方程式を解こう：

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & p \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & q \end{array}\right.$$

これを係数行列 A を用いて表すと次のようになる：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

ゆえに，逆行列の公式を用いると，次を得る：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} p\tilde{A}_{11} + q\tilde{A}_{21} \\ p\tilde{A}_{12} + q\tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} p & a_{12} \\ q & a_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & p \\ a_{21} & q \end{vmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上記の公式をまとめると，以下の**クラーメルの公式**が得られる．また，3 変数で 3 つの等式からなる連立方程式についても，同様の公式を導くことができる．

クラーメルの公式

- $$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & p \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & q \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} p & a_{12} \\ q & a_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & p \\ a_{21} & q \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

- $$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & p \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & q \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & r \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} p & a_{12} & a_{13} \\ q & a_{22} & a_{23} \\ r & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & p & a_{13} \\ a_{21} & q & a_{23} \\ a_{31} & r & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & p \\ a_{21} & a_{22} & q \\ a_{31} & a_{32} & r \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

ただし，A は与えられた連立方程式の係数行列である．

問. クラーメルの公式を利用して，連立方程式を解け.

$$(1)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & -1 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

解答. (1) 係数行列を $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと，$|A| = -5$．ゆえに，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) 係数行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，$|A| = 1 - 1 - 1 = -1$．ゆえに，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2-3-3+2 \\ 2+2-2-3 \\ 3-2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

練習 **4.4** 次の連立方程式を解け.

$$(1)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 9 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 7 \\ 3x & - & y & + & z & = & 8 \\ -x & + & 3y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

第5章　解答

5.1　第1章

練習 1.1. (1)

$$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3\\3\end{bmatrix}$$

(2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$ である．求めるベクトルを $\boldsymbol{a}'$ とおくと，

$$\boldsymbol{a}'=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}$$

練習 1.2. (1) スカラー a,b に対して，$a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ とおき，$a=b=0$ を示そう．$a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ より，

$$a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

ゆえに，次の連立一次方程式

$$\begin{cases}a+3b=0\\2a+4b=0\end{cases}$$

を解き，$a=b=0$ を得る．

(2) スカラー a,b,c に対して，$a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ とおき，a,b,c のうち少なくとも 1 つが 0 でないことを示す．$a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ より，

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ゆえに，次の連立一次方程式

$$\begin{cases}a+b+3c=0\\ \quad\;\, b+c=0\\2a-b+3c=0\end{cases}$$

を解けばよい．例えば，$a=-2,b=-1,c=1$ が解となり，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は線型従属である．

練習 1.3. (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cdot3+(-1)\cdot1=5$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k(k-1)+2\cdot(-3)=k^2-k-6=(k-3)(k+2)$ である．条件 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ より，$k=3,-2$.

練習 1.4. (1) 内積の公式より，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

. ゆえに，$\theta = \frac{\pi}{3}$.

(2) 正射影の公式より，

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\,\boldsymbol{b} = \frac{2\sqrt{3}}{12}\boldsymbol{b} = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

5.2 第 2 章

練習 2.1 (1) $A+B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, $X = 2B-3A = \begin{bmatrix} -6 & -23 & 9 \\ 8 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $AB = \begin{bmatrix} 123 & 456 \\ -123 & -456 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -300 & -30 & -3 \\ -300 & -30 & -3 \\ -300 & -30 & -3 \end{bmatrix}$, ${}^tA{}^tB = \begin{bmatrix} -300 & -300 & -300 \\ -30 & -30 & -30 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

(3) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $AB = \begin{bmatrix} 39 & 20 & 1 & 75 \\ 21 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(5) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ （方針：A^2, A^3 を求め，A^n を予想し，数学的帰納法で証明する.）

練習 2.2

(1) $\dfrac{1}{29}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) 逆行列なし. (4) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.3 第 3 章

練習 3.1

(1) $(x,y,z) = (3,2,-1)$, (2) $(x,y,z) = (1,0,0)$

練習 3.2

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & -12 & 10 & -7 & 5 \\ 5 & 21 & -16 & 1 & 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -14 & 14 & -7 & 7 \\ 0 & 26 & -26 & 1 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

練習 3.3

(1) $[\boldsymbol{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 11 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

よって，階数が 2 であるので一次従属である．

(2) $[\boldsymbol{xyz}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

よって，階数が 3 であるので一次独立である．

練習 3.4

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1-x^2 & 1-x & 1-x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 & x-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 1-x & 1-x \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 0 & -x^2-x+2 & 1-x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & -(x+3)(x-1) \end{bmatrix}$$

したがって，$x=-3$ のとき階数は 3．$x=1$ のとき階数は 1．それ以外のとき階数は 4.

練習 3.5

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ゆえに，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{bmatrix}$

ゆえに，t を任意の実数とするとき，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ゆえに，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & -17 & 13 \\ 2 & 4 & 1 & -12 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -10 & 6 \\ 0 & -3 & -2 & 13 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -10 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ & & & \boxed{\text{-1}} & \end{bmatrix}$

ゆえに，t を任意の実数とするとき，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 & 2 \\ & \boxed{\text{-1}} & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & -1 \\ & & & \boxed{\text{-1}} & & \\ & & & & \boxed{\text{-1}} & \end{bmatrix}$

ゆえに，a, b, c を任意の実数とするとき，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ 11 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

練習 3.6

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ゆえに，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ & & \boxed{\text{-1}} \end{bmatrix}$

ゆえに，t を任意の実数とするとき，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$

練習 3.7

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 6 & -8 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

したがって，係数行列と拡大係数行列の階数が異なり，解なしである．

練習 3.8 連立方程式を行列の基本変形で解く．そして，それが解を持つためには，係数行列と拡大係数行列の階数が一致する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -3 & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2-a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2-2a \\ 0 & -1 & -3 & 0 & b-3a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4a-2 \end{bmatrix}$$

係数行列の階数は2であるから，$-3a=0$ かつ $b-4a-2=0$ である．これを解くと，$a=0, b=2$ である．これを代入すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

であり，s, t を任意の実数として，次を得る：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4 第4章

練習 4.1

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-6=-8.$ したがって，求める面積は8.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$ したがって，求める面積は5.

(3) 3つのベクトルの張る平行六面体の体積が0となればよいので，$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & t \\ 2 & t & 2 \end{vmatrix} = -4t^2+3t+10=0$ を解けばよい．$4t^2-3t-10=(t-2)(4t+5)$ より，$t=2, -\frac{5}{4}$.

練習 4.2 (1)

$$\begin{aligned} |A| &= abc + c^2b + 2b^2 - 2b^2 - b^2c - c^2a = abc + bc(c-b) - c^2(b-c) \\ &= ac(b-c) - bc(b-c) = c(a-b)(b-c) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a+b+c & a & b \\ 0 & b+c+2a & b \\ 0 & a & c+a+2b \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & b \\ 0 & b+c+a & b \\ 0 & 0 & c+a+2b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c+a+2b \end{vmatrix} \\
&\qquad + ca \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c+a+2b \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & b+c+2 & b \\ 1 & 0 & c+a+2b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^3 + b \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 1 \\ 0 & a+b+c & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+b+c \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+b+c & 0 \\ 1 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^3 + b(a+b+c)^2 + a(a+b+c)^2 + c(a+b+c)^2 = 2(a+b+c)^3
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
|A| &= bc^2 + a^2c + ab^2 - a^2bac^2 - b^2c = a^2(c-b) + a(b^2-c^2) - bc(c-b) \\
&= (c-b)\{a^2 - a(b+c) + bc\} = (c-b)(a-b)(a-c)
\end{aligned}$$

練習 4.3 (1) 余因子を求めると，$\tilde{A}_{11} = 1$, $\tilde{A}_{12} = -(-2) = 2$, $\tilde{A}_{21} = -3$, $\tilde{A}_{22} = 1$ であるから，余因子行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を得る．$|A| = \frac{1}{6}$ だから，$A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 余因子を求めると，

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 3 \quad && \tilde{A}_{12} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad && \tilde{A}_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2 \\
&\tilde{A}_{21} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -1 && \tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 && \tilde{A}_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2 \\
&\tilde{A}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 && \tilde{A}_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 && \tilde{A}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2
\end{aligned}$$

ゆえに，$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ である．$|A| = 1 - 1 - (-1) = 1$ より，$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(3) 余因子を求めると，

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -4 \quad && \tilde{A}_{12} = -\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3 \quad && \tilde{A}_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -8 \\
&\tilde{A}_{21} = -\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 7 && \tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 && \tilde{A}_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 5 \\
&\tilde{A}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -5 && \tilde{A}_{32} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -10 && \tilde{A}_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

ゆえに，$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 3 & 2 & -10 \\ -8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ である．$|A| = -2 - 1 + 24 + 6 + 4 - 4 = 27$ より，
$A^{-1} = \dfrac{1}{27}\begin{bmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 3 & 2 & -10 \\ -8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

練習 4.4 (1) 係数行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと，$|A| = 3$．ゆえに，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) 係数行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと，$|A| = 1 - 1 + 18 - 2 + 3 - 3 = 16$．ゆえに，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 + 2 + 48 + 4 - 21 + 8 \\ -8 - 7 + 12 + 16 + 21 - 2 \\ -2 - 8 + 63 - 7 - 6 - 24 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 48 \\ 32 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$