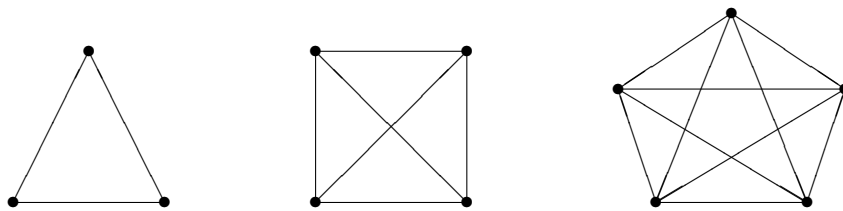


教員養成のためのグラフ理論



〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-2
横浜国立大学 教育人間科学部
学校教育課程 数学教育講座

中本 敦浩

Email: nakamoto@edhs.ynu.ac.jp

平成 14 年 8 月 13 日最終更新

はじめに

現在、数学は生徒たちに嫌われる教科の1つになっているという。また、数学を得意とする生徒たちもどこか形式的理解に留まっていて、公式暗記・公式運用術に優れた生徒が数学ができる生徒として扱われている例もある(これは、私の日常の講義で感じることで)。本講義で扱うグラフ理論(または離散数学)では、数学的論理と簡単な四則演算のみによる問題解決が可能であり、それほどたくさんの道具(公式や定理)が必要でない。その代わりとして、計算によらない思考力、ある鋭い着眼点の抽出能力、論理性(巧妙な背理法、数学的帰納法の運用)などが必要である。

現行の学校数学のカリキュラムにおいて、中学校数学、数I、数Aくらいまでは思考力を問う問題で、初等的問題解決が必要なものが多く含まれる。それに続いて、数II、数Bと使われる数学的道具がだんだん大がかりとなり、公式の暗記が必要不可欠となる。数III、数Cにおいてはほとんど公式を暗記して、テクニカルな処理を身につけることが数学の勉強となっている。もちろん、数IIIにおいて、公式を導きながら問題を解いていたら、とてもじゃないが、試験における高得点は望めない。 $(f(x) = \log x$ に対して、 $f'(x) = \frac{1}{x}$ が直ちに導けますか?) うぶな生徒が、このような学校数学の体系を目の当たりにすると、テクニカルな処理こそが高等数学であるという大誤解に陥る可能性がある。

算数・数学は「考える」ことを要求し、なおかつ、その結果が客観的に正しいかを確かめることができる唯一の教科だと思う。しかしながら、学校高等数学は、上で述べたような有り様で、本来の数学的試行錯誤の面白さや、うまい問題解決を味わう機会を奪い去っているように思われる。本講義では、単純なグラフという数学的対象を扱うことにより、昔、考えることが好きだったころの自分を思いだし、「教師になるには群の定義が言えなければならない」とか「 ϵ - δ 論法をわかっているなければ数学科を卒業したとは言えない」とか、他のそのような現在の大学数学が与えている強迫観念を捨てて、本講義で扱う初等的でおもしろい数学を学んで欲しい。特に、教員になり、未来の数学教育を担う人にはなおさら、このような数学の存在を知って欲しい。(学生にとって、大学で教える純粋数学は必要ないといっているのではないが、基礎固めを重要視しすぎて、学生の数学離れを助長している傾向がある。)

離散数学では必要な基礎知識が少なく済むので、古典的な数学をやっている人からすると、初等的に映り、低級な数学と見られるかもしれない。事実、先輩の研究者たちには、そういう偏見と戦ってきた歴史があるそうである。しかしながら、解析をやっている学生(大学院生)は我々の分野の学生より、論理的思考に弱い傾向にあると聞いたことがある。このことから、現在の解析中心の学校数学の中で、離散数学を十分に取り込めば、今まで学生、または生徒に身につけてなかった論理性をうまく習得できるとは言えないだろうか。

さて、グラフとはいくつかの点とそれを結ぶ線からなる図形を意味する。グラフは数や表に続く第3の表現方法と言われている。グラフを用いると、今までは数式などでは扱えなかった数学的対象をも表現することができる。グラフは日常のいろいろなもの関係、状態、構造を表すものとして捉えられるので、日常生活に役に立つ数学として利用可能である。(講義の中でこれについてはいろいろ紹介します。) しかしながら、私は「生活に使える数学」としてグラフ理論を広めるより、むしろ、その生活密着性をうまい動機付けとし、これまでの学校数学では習得できなかったグラフ理論ならではの手法、着眼点、論理性などの計算によらない数学の存在や面白さを紹介したい。この講義は、簡単な数学を扱うお楽しみ会ではない。簡単な題材を通して、深遠な数学的論理や議論を理解して欲しい。定理の証明で、内容はフォローできるけど、なぜそれが証明になっているかがわからないという変な経験もできることでしょう。

この原稿では、純粋数学としてのグラフ理論とそれに付随する話題、または、他の研究者との議論で得られた話題を紹介する。特に、教員養成のためということで、学校教育において指導可能であると思われる離散数学的題材を随所に織り交ぜた(特に最終章)。本講義で「離散数学的考え方のよさ」を感じられれば大成功である。

横浜国立大学 教育人間科学部
学校教育課程 数学教育講座
中本 敦浩

平成13年6月

目次

| | | |
|------------|------------------|-----------|
| 第1章 | グラフとは | 6 |
| 1.1 | グラフの定義 | 6 |
| 1.2 | グラフ理論の基本定理? | 11 |
| 1.3 | 次数列について | 14 |
| 1.4 | 完全グラフ | 20 |
| 1.5 | 2部グラフ | 22 |
| 1.6 | 補グラフ | 24 |
| 第2章 | グラフの連結性 | 27 |
| 2.1 | 連結度 | 27 |
| 2.2 | メンガーの定理 | 28 |
| 2.3 | k -連結グラフの性質 | 30 |
| 第3章 | グラフの中の経路 | 32 |
| 3.1 | オイラー回路 | 32 |
| 3.2 | ハミルトン閉路 | 34 |
| 第4章 | マッチング | 40 |
| 4.1 | 2部グラフのマッチング | 40 |
| 4.2 | 一般のグラフのマッチング | 43 |
| 第5章 | 平面グラフ | 46 |
| 5.1 | オイラーの公式 | 46 |
| 5.2 | 正多面体 | 48 |
| 5.3 | 曲面上のグラフ | 53 |
| 第6章 | 彩色問題 | 56 |
| 6.1 | 抽象グラフの彩色 | 56 |
| 6.2 | 平面グラフの彩色 | 59 |
| 6.3 | 染色多項式 | 62 |
| 第7章 | ラムゼー現象 | 65 |
| 7.1 | ラムゼーの定理 | 65 |
| 7.2 | グラフ理論におけるラムゼーの定理 | 66 |

| | |
|--|-----------|
| 第 8 章 ネットワーク | 68 |
| 第 9 章 その他 | 71 |
| 9.1 数え上げの方法—部分集合の総数 | 71 |
| 9.2 数え上げの方法—凸 n 角形の対角線の交点数 | 73 |
| 9.3 数え上げの手法—長方形の個数 | 75 |
| 9.4 数え上げの手法—正四面体の数 | 80 |
| 9.5 (m, n) -町の巡回可能性 | 85 |
| 9.6 木の隔たり | 89 |
| 9.7 白と黒の問題 | 93 |
| 9.8 鳩の巣原理 | 96 |

第1章 グラフとは

1.1 グラフの定義

グラフ G とは, 有限集合 V とその2元部分集合族 $E \subset \binom{V}{2}$ から決まる構造 $G = (V, E)$ である. 通常, X を小さな点で表し, $\{x, y\} \in E$ のとき x と y を線で結ぶことにより, G をいくつかの点とそれを結んで得られる図形で表す. このとき, グラフの点を**頂点**といい, それを結ぶ線を**辺**という. グラフ G の頂点集合と辺集合を $V(G)$ と $E(G)$ で表す. 集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す. 特に, $|V(G)| = 0$ であるグラフ G を**空グラフ**といい, $|V(G)| = 1$ であるグラフ G を**自明なグラフ**という. 2つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ が**同型である**とは, (V, E) と (V', E') が同じ構造を持つことである¹. 例えば, 図 1.1 は

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b, c, d, e, f, g\}, \\ E(G) &= \{ab, ac, cb, cd, bd, dg, ge, gf\} \end{aligned}$$

なるグラフ G を示している. (頂点 $x, y \in V(G)$ に対して, それを結ぶ辺は $V(G)$ の2元部分集合と定義されるので, $\{x, y\} \subset V(G)$ と表さなくてはならないが, 表記を簡単にするため, 単に $xy \in E(G)$ と書く.)

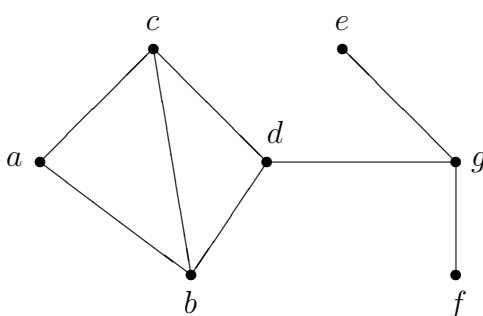


図 1.1: グラフ G

問題 1.1 図 1.2 の 12 個のグラフの中で, 同型なグラフを挙げよ.

¹ ちゃんというとは, 全単射 $\phi: V \rightarrow V'$ が存在し, 任意の $u, v \in V$ に対して, $uv \in E \iff \phi(u)\phi(v) \in E'$ が成り立つことである. この写像 ϕ を $\phi: G \rightarrow G'$ と書き, G と G' の**同型写像**という.

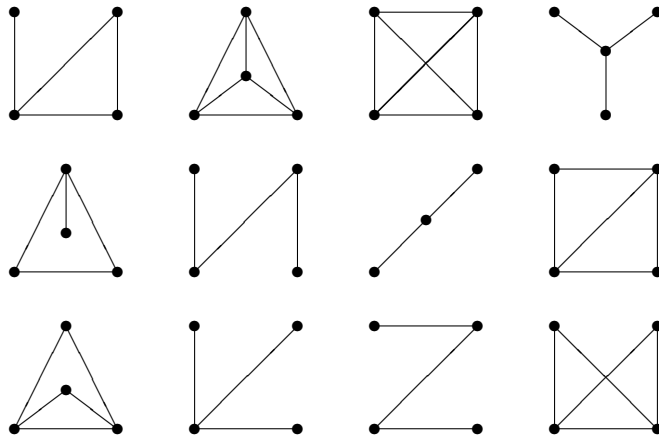


図 1.2: 同型なグラフはどれか

問題 1.2 4 頂点からなる同型でないグラフをすべて挙げよ. (このような問題では, ある種の方向性を持って場合を列挙する必要がある. この章の終わりに定義される補グラフを参照せよ.)

解答. 辺数に着目して列挙すると, 図 1.3 のようになる. この際, k 本の辺を持つグラフと $6 - k$ 本の辺を持つグラフに 1 対 1 対応があることを考えれば ($k = 0, 1, 2, 3$), 場合分けの数をずっと少なくすることができる. ■

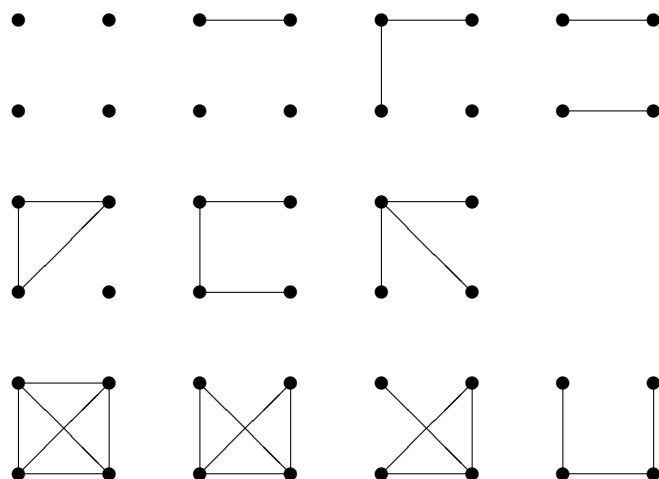


図 1.3: 4 頂点からなるすべてのグラフ

グラフは, 有限集合 V とその 2 元部分集合族からなるので, どの 2 頂点も高々 1 本の辺で結ばれ, どの辺の両端点も異なっている. しかしながら, そうでない広義のグラフを考

えることがあり、それらを**多重グラフ**という。**多重辺**とは同じ頂点对を結ぶ複数本の辺であり、**ループ**とは自分自身を結ぶ辺のことである。多重辺もループも持たないグラフを**単純グラフ**という。頂点 v に隣接する頂点を v の**近傍**といい、 v の近傍全体からなる集合を $N_G(v)$ と表す。グラフ G の頂点 v に接続する辺の本数を**次数**といい、 $\deg_G(v)$ で表す。次数が偶数の頂点を**偶点**といい、奇次数の頂点を**奇点**という。特に、次数0の頂点を**孤立点**という。グラフ G が単純なら、 $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ である。グラフ G 中の次数の最大値と最小値を**最大次数**と**最小次数**といい、 $\Delta(G)$ と $\delta(G)$ で表す。特に、 $\Delta(G) = \delta(G) = k$ のとき、 G は**正則**、または、 **k -正則**であるという。

隣接する2点が異なる色を持つように頂点全体を2色(白と黒)で塗ることができるグラフを**2部グラフ**という(図1.4参照)。同色で塗られた頂点集合を**部集合**という。部集合 X, Y を持つ2部グラフを G を $G = (X, Y)$ と表す。

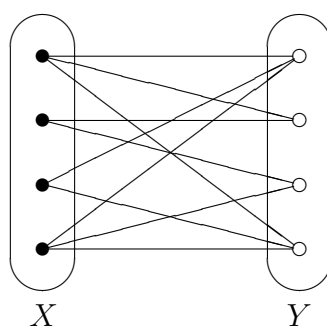


図 1.4: $|X| = |Y| = 4$ なる 2部グラフ $G = (X, Y)$

すべての点対が結ばれた n 点のグラフを**完全グラフ**といい、 K_n と表す。グラフ中の経路を**歩道**といい、閉じた歩道を**閉歩道**という。すべての頂点が異なる歩道を**道**、または**パス**といい、すべての頂点が異なる閉歩道を**閉路**、または**サイクル**という(図1.5参照)。閉路の長さの偶奇性によって、**偶閉路**や**奇閉路**という。

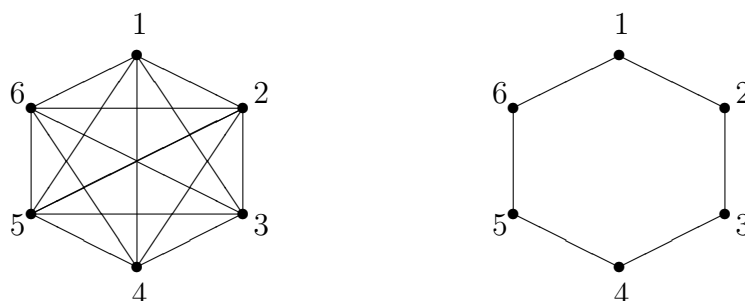


図 1.5: 完全グラフ K_6 とサイクル C_6

グラフが**連結**であるとは、任意の2頂点を結ぶパスが存在することである。グラフ G が連結でないとき、 G のそれぞれの連結な部分グラフを**連結成分**という。 G の連結成分の個

数を**連結成分数**といい、 $\omega(G)$ で表す。

閉路を含まない連結グラフを**木**という。(道は木である。) 木は、いろいろな方向から定義できる:

命題 1.3 グラフ G における以下の記述は同値である:

- (i) G は閉路を含まない連結グラフである。
- (ii) G の任意の 2 頂点はちょうど 1 つの道で結ばれている。
- (iii) $|E(G)| = |V(G)| - 1$ を満たす。

証明. (i) \Rightarrow (ii). G は連結であるから、 G は任意の 2 頂点を結ぶ道を持つ。ある 2 頂点 u, v を結ぶ 2 つの道 P_1, P_2 が存在すれば、 $P_1 \cup P_2$ は閉歩道を形成し、 $P_1 \neq P_2$ だから、その中に閉路を発見することができる。

(ii) \Rightarrow (iii). G の任意の辺 $e = uv$ を選び、 $G' = G - \{e\}$ が非連結であることを証明する。ある e に関して、 G' が連結であったとする。このとき、 G' の中に u と v を結ぶ道 P がある。 G において、 $P \cup \{e\}$ は閉路になり、(ii) に反する。したがって、任意の辺 $e \in E(G)$ に対して、 $G - \{e\}$ は非連結である。また、残りのグラフのどの連結成分も (ii) を満たすことから、どの辺を取り除いても、連結成分数がちょうど 1 つ増えることがわかる。したがって、 $|E(G)|$ 回の辺の除去により、 $|V(G)|$ 個の孤立点が得られたので、 $|E(G)| = |V(G)| - 1$ である。

(iii) \Rightarrow (i). $|V(G)|$ に関する帰納法を用いる。 $|V(G)| = 1$ のとき、明らかであるから、 $|V(G)| \geq 2$ としてよい。 $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$ であるから、(iii) より、 G の平均次数 \bar{d} は

$$\bar{d} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = 2 - \frac{2}{|V(G)|} < 2$$

である。 G は連結であるから、次数 1 の頂点 v を持つ。このとき、 $G' = G - \{v\}$ とおくと、 G' は (iii) を満たす。帰納法の仮定により、 G' は連結であり、閉路を持たない。したがって、 v の次数は 1 であるから、 G も連結であり、閉路を持たない。■

木の性質として、次のものは帰納法をかけるときに有効である。

命題 1.4 頂点数 2 以上の木は次数 1 の点を少なくとも 2 つ以上持つ。

証明. T_n を n 頂点の木とする。 $n \geq 2$ のとき、次数 1 の点が 1 つ以上あることは、命題 1.3 の証明 (iii) \Rightarrow (i) の証明の中で示されている。この命題を n に関する帰納法で示す。 $n = 2$ のとき、 $T_2 = K_2$ であり、命題は成り立つ。 $n \geq 3$ のとき、 T_n は次数 1 の頂点 v を持つ。 $T_n - v$ は、帰納法の仮定より、次数 1 の点を 2 つ以上持つ。 v を戻し T_n を再構成するとき、次数 1 の頂点数は減らないので、 T_n は次数 1 の頂点を 2 つ以上持つ。■

問題 1.5 6 頂点以下の木をすべて挙げよ。

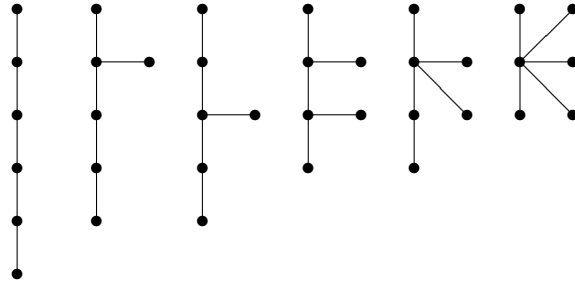


図 1.6: 6 頂点からなるすべての木

解答. グラフ中の最も長い道の長さに着目することにより, 図 1.6 のように列挙することができる. ■

グラフ G の 2 頂点 x, y に対して, x と y を結ぶパスの長さの最小値を G における x と y の距離といい, $d(x, y)$, または $d_G(x, y)$ と表す. グラフ G の直径 $d(G)$ とは

$$d(G) = \max\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$$

と定義される.

グラフ $G = (V, E)$ に対して, $V' \subset V, E' \subset E$ を満たすグラフ $G' = (V', E')$ を G の部分グラフという. 特に, $V = V'$ のとき, G' は全域部分グラフと呼ばれる. また, 木である全域部分グラフを全域木という. グラフ G が全域木を持つとき, G は必ず連結である. G に対して, $S \subset V(G)$ を固定する. S によって誘導される部分グラフ, または, S による誘導部分グラフ ($\langle S \rangle$ で表す) は, 次のように定義されるものである:

$$\begin{aligned} V(\langle S \rangle) &= S \\ E(\langle S \rangle) &= \{uv \in E(G) : u, v \in S\}. \end{aligned}$$

特に, $V(G)$ による誘導部分グラフ $\langle V(G) \rangle$ は G 自身である.

最後に, 証明中によく用いるグラフの変形操作を紹介する. グラフ G の辺 $e \in E(G)$ に対して, e の除去とは, G から辺を取り除くことを意味し, e の縮約とは, e を除去し, 端点を同一視することである. 辺 e の除去と縮約により得られたグラフをそれぞれ $G - e$ と G/e と表す. 特に, e が縮約されて生じた G/e の中の頂点を $[e]$ と表す. (図 1.7 参照.)

グラフ G が平面に埋め込まれているとき, すなわち, G が辺の交差なく平面に描かれているとき, このようなグラフを平面グラフという. $F(G)$ により G の面の集合を表す. (G の面とは, 平面から G を除いたときに生じる連結領域である.) 外側の非有界領域を外領域, または, 無限面といい, それ以外の面を有限面という. 平面グラフとして, 平面に実現できるグラフを平面的グラフという. 平面グラフにおいて, 辺数が極大なものを極大平面グラフという.

命題 1.6 極大平面グラフの各面は三角形である.

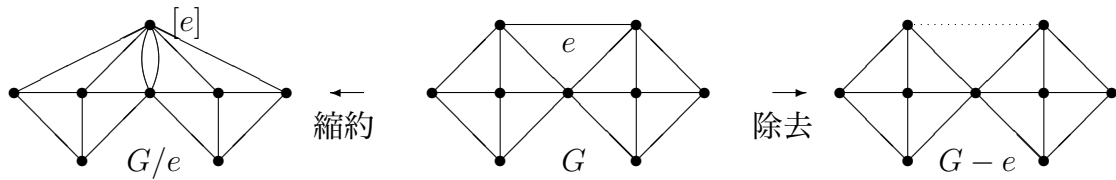


図 1.7: 辺 e の縮約と除去

証明. 平面グラフ G が三角形以外の面 F を持つとき, グラフの単純性を壊すことなく, 対角線が加えられることを示す.

F の境界閉歩道を $v_1v_2v_3v_4\cdots v_k$ とする ($k \geq 4$). 対角線 v_1v_3 を加えることができなければ, F の内部を通り, v_1 と v_3 を結ぶ曲線 γ と辺 v_1v_3 とで形成される閉曲線 ℓ は v_2 と v_4 をそれぞれ内部と外部に分ける². ($v_1 = v_3$ である場合, ℓ は F の内部を通る頂点 $v_1 = v_3$ に接続するループである.) したがって, 対角線 v_2v_4 を加えることができる. ゆえに, 対角線 v_1v_3 または v_2v_4 を加えることができる.

この操作を繰り返すことにより, すべての面を三角形にできる. ■

1.2 グラフ理論の基本定理?

数学のいろいろな分野の中には, その分野の基本定理を持つものがある. グラフ理論には, 特にそのようなものはないが, この章では, それに値すると思われる定理とその応用について述べる.

次の命題と系が基本定理(?) である.

命題 1.7 (握手補題) 任意のグラフにおいて, 次数の総和は辺数の 2 倍に等しい.

証明. グラフにおいて, 各頂点の次数をすべて足す. すると, 各辺はちょうど 2 回ずつ数えられたことになる. ■

系 1.8 (奇点定理) 任意のグラフにおいて, 次数が奇数の点 (奇点) は偶数個存在する.

証明. 握手補題より, 次数の合計は偶数である. 奇次数の頂点が奇数個あれば, 次数の合計が奇数になってしまう. これは矛盾である. ■

以下では, 奇点定理の応用例を紹介する. 偶奇性の議論により, 驚くような事実をたくさん証明できることがわかるだろう.

命題 1.9 外領域が奇角形であり, 有限面がすべて偶角形の平面グラフは存在しないことを証明せよ.

² ここでは, ジョルダンの閉曲線定理を使っている. それは, 「平面上の任意の単純閉曲線は, 平面を内側と外側に分かる」というものである. 単純で, 全く疑う余地のない事実だが, 「平面とは何ぞや」という公理的な議論を展開する必要がある, その証明は非常に長く, 難しい.

証明をする前に、平面グラフ G の**双対グラフ** G^* を次のように定義する。まず、 G の各面 $f \in F(G)$ の中心の頂点 v_f を置く。そして、 f と f' が辺 e を共有するとき、 v_f と $v_{f'}$ を e を横切る辺 e^* により結ぶ。このように得られるグラフが G^* である³ (図 1.8 参照)。定義より、 $(G^*)^* = G$ である。

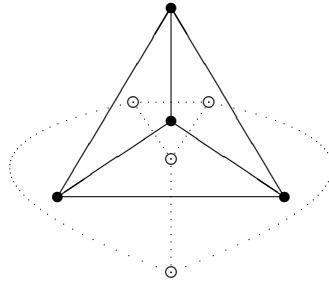
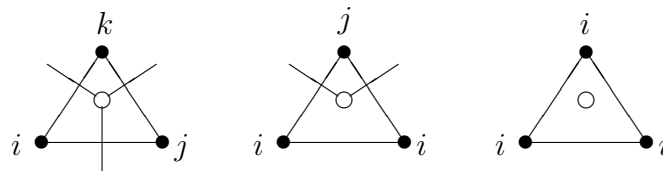


図 1.8: 双対グラフ G^*

命題 1.9 の証明. 外領域が奇角形で、すべての有限面が偶角形の平面グラフが存在すると仮定し、それを G とする。そして、 G の双対グラフ G^* を考える。 G^* において、 G の外領域 F に対応する頂点の次数は奇数であり、 G のすべての有限面に対応する頂点の次数は偶数である。これは、奇点定理に反する。したがって、そのような G は存在しない。■

命題 1.10 極大平面グラフ (外領域も有限面もすべて三角形の平面グラフ) の外領域の 3 点に順に番号 1, 2, 3 を与える (図 1.9 参照)。どのように内点に 1, 2, 3 を与えても、境界上に 1, 2, 3 がすべて現われている三角形が生じることを証明せよ。

証明. 極大平面グラフ G の外側の頂点に 1, 2, 3 をすべてを、内側に頂点にも 1, 2, 3 を適当に与える。このとき、次のようにして、 G^* の全域部分グラフ H を定義する: 辺 e を共有する G の面 f, f' に対して、 e の端点が異なる数 i, j を持っているときのみ、 v_f と $v_{f'}$ を辺で結ぶ。面 f の境界では、1, 2, 3 のすべてが現れる場合、2 つの数が現れる場合、すべての数が同一である場合のいずれかの状況が起こっており ($i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ は相異なる数である), 対応する頂点 v_f の H での次数はそれぞれ 3, 2, 0 となる:



外領域 F には 3 つの異なる数が現れているので、 $\deg_H(v_F) = 3$ である。ここで、もし有限面の境界に 1, 2, 3 のすべてが現れるものがないと、すべての有限面 f に対応する頂点 v_f

³ G^* は $V(G^*) = F(G)$ となるグラフであり、 G が単純だからといって、 G^* は必ずしも単純にならない。特に、 $|E(G)| = |E(G^*)|$ である。

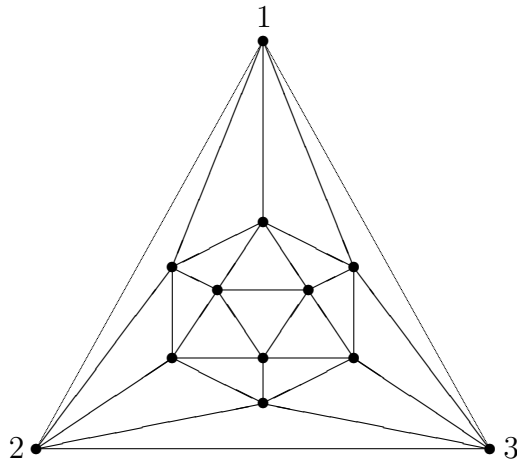


図 1.9: 外側の頂点に 1, 2, 3 が与えられた極大平面グラフ

に対して, $\deg_H(v_f) = 0, 2$ である. H において, v_F のみが奇次数を持つことになり, H が奇点定理を満たさない. これは矛盾であり, 有限面にはその境界に 1, 2, 3 のすべてが現れるものが存在する. ■

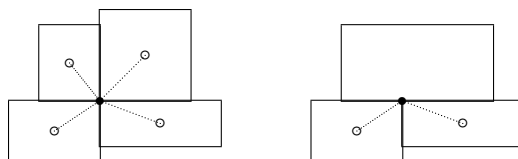
命題 1.10 には素晴らしい応用がある. ブラウワーの平面の**不動点定理**⁴ と呼ばれる事実の証明に用いられる.

命題 1.11 長方形 R が, 縦, または, 横の少なくともどちらか一方の長さが整数の小長方形を敷き詰めて得られたならば, R の縦, または, 横の長さも整数である (図 1.10 参照).

証明. 長方形 R の頂点を v_0, v_1, v_2, v_3 とし, R を xy 平面の第 1 象元に, v_0 が原点に一致するように, 配置する. このとき, v_1, v_2, v_3 のいずれかが**整数点** (x 座標も y 座標も整数になっている点) に位置することを証明すればよい.

すべての小長方形の中心にグラフの頂点を置き, その頂点集合を S とする. すべての長方形のすべての頂点にグラフの頂点を置き, その頂点集合を T とする (したがって, $v_0, v_1, v_2, v_3 \in T$). そして, すべての頂点 $t \in T$ に対して, t が整数点上にあれば, t を四隅に持つ長方形の中心にある S の点と結ぶ. これにより, 頂点集合 $S \cup T$ を持つ 2 部グラフ $H = (S, T)$ を定める.

任意の $t \in T - \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ に対して, t を頂点とする長方形は 2 つか 4 つであるので, t が整数点上にない場合も含め, $\deg_H(t) = 0, 2, 4$ である.



⁴ 平面上の三角形を Δ で表す. 写像 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ が**連続である**とは, 任意の $a \in \Delta$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, $b \in \Delta$ と a の距離が δ 以下ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の距離が ε 以下になっていることである. 平面の不動点定理とは, 任意の連続写像 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ は固定点をもつというものである. 離散的な議論で, 連続の対象を扱う定理が証明できることが興味深い.

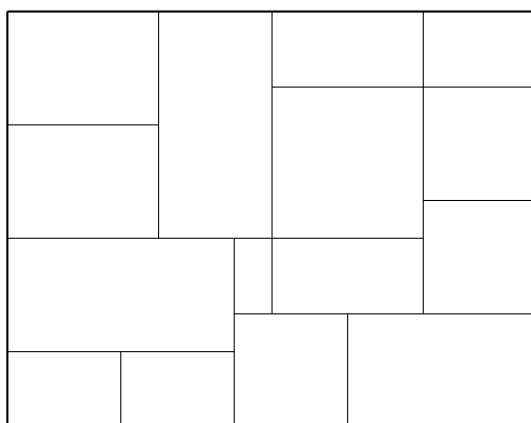
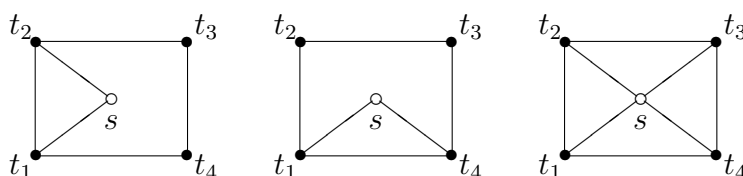


図 1.10: 1 辺の長さが整数の小長方形を敷き詰めた長方形 R

一方, $s \in S$ に対する小長方形の四隅の点 t_1, t_2, t_3, t_4 (時計回り順) の 1 つ t_1 が整数点ならば, 条件より, t_2 または t_4 は整数点上にある. t_2 と t_4 のどちらか一方のみが整数点上にあれば, t_3 は整数点上になく, t_2 と t_4 のどちらも整数点上にあれば, t_3 は整数点上にあることがわかる. したがって, 任意の s に対して, $\deg_H(s) = 0, 2, 4$ である.



さて, $\deg_H(v_0) = 1$ である. したがって, 奇点定理により, v_1, v_2, v_3 のうちの少なくとも 1 つの次数は 1 であり, 整数点上にあることになる. ■

1.3 次数列について

グラフ G の次数を並べたものを G の**次数列**という. 前節で触れたように, 奇点定理により, 次数をすべて加えると必ず偶数になるはずである. 逆に, 奇点定理を満たす非負整数列を勝手に与えたとき, それを次数列とするようなグラフは常に存在するといえるだろうか. この節では, この問題について考える.

整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次数列とするグラフが存在するとき, d は**グラフ的**であるという. ここで, 扱うグラフは単純であること, すなわち, 多重辺やループを持たないことを強調しておく. なぜなら, 次の命題が成り立つからである:

命題 1.12 和が偶数である任意の非負整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次数列とする多重グラフが存在する.

証明. d_1, \dots, d_n のすべてが偶数のとき, 頂点 v_i に $\frac{d_i}{2}$ 本のループを接続させればよい. そうでない場合, 一般性を失うことなく d_1, d_2, \dots, d_{2h} が奇数としてよい. このとき, 数列 $d' = (d'_1, \dots, d'_n)$, ただし,

$$d'_i = \begin{cases} d_i - 1 & (i = 1, \dots, 2h) \\ d_i & (i = 2h + 1, \dots, n), \end{cases}$$

は偶数のみからなる. 上の構成により, $\deg(v_i) = d'_i$ なる多重グラフが得られるので, それに h 本の辺 $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2h-1}v_{2h}$ を加えることにより, 図 1.11 のように次数列 d の多重グラフが得られる. ■

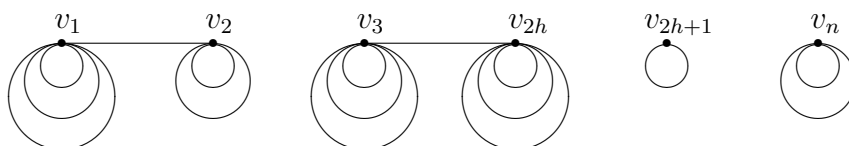


図 1.11: 次数列 d の多重グラフ

整数列がグラフ的かどうかを, 単純グラフに限定して考えることにする. その前に, 単純グラフの次数列の性質を少し紹介する.

命題 1.13 任意のグラフ G において, 次数の等しい 2 点が存在する.

この命題は次のように言い換えられる: 教室に n 人の学生がいる. 1 人ひとりに, この中に何人友達がいるか尋ねたら, 必ず, 友人の数が等しい学生が 2 人以上いる. ただし, 自分自身は自分の友人でなく, 友人関係は対称であるとする (すなわち, A が B の友人であれば, B も A の友人である).

命題 1.13 の証明. G の頂点集合を $\{v_1, \dots, v_n\}$ とし, すべての頂点の次数が異なると仮定する. 自分自身を結ぶ辺は存在しないので,

$$n - 1 \geq \deg(v_1) > \deg(v_2) > \dots > \deg(v_n) \geq 0$$

である. このとき, 明らかに

$$(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_{n-1}), \deg(v_n)) = (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0)$$

である. $\deg(v_1) = n - 1$ と $\deg(v_n) = 0$ は両立しないので, これは矛盾である. したがって, ある 2 点は次数が等しいことになる. ■

命題 1.13 により, n 頂点からなるグラフのすべての頂点の次数が異なることはできない. しかし, 次の問題では, 1 つの頂点以外はすべての次数が異なることあり, ある条件をつければ, そのグラフが一意的に定まることを意味している. これは, グラフを使うと, 難しそうな問題が一発で解けるという例として, よく紹介されている.

問題 1.14 3組の夫婦からなる6人の間で握手を数回交わした. 私以外の握手の回数はすべて異なり, 同じ夫婦間では握手をしなかったとする. このとき, 私の配偶者の握手の回数は何回か.

問題 1.14 は次の問題と同じである.

問題 1.15 6頂点のグラフがあり, その頂点を a, a', b, b', c, c' とする. $aa', bb', cc' \notin E(G)$ であり, 頂点 a 以外のすべての次数は異なっている. このとき, 頂点 a' の次数を求めよ.

解答. どの頂点にも非隣接な点が存在するので, a 以外の頂点の次数は $0, 1, 2, 3, 4$ である. 次数 4 の頂点は次数 0 の頂点以外にはすべて隣接しているので, 次数 0 と次数 4 の点が b, b' であるとしてよい. (図 1.12 左参照.)



図 1.12: 6 頂点グラフの決定

図 1.12 左において, 次数 3 と次数 2 の頂点を作るために辺を追加しなければならない. しかし, 次数 $0, 1, 4$ の頂点には辺を結ぶことはできない. 辺の追加の方法は一意的であり, 図 1.12 右が得られる. 次数 3 の頂点の非隣接な点は次数 1 の頂点であり, これらを c, c' と置いてよい. したがって, a' の次数は 2 であることがわかる. ■

問題 1.15 を以下のように拡張せよ.

問題 1.16 $2k$ 頂点のグラフがあり, その頂点を $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ とする. すべての i に対して, $a_i b_i \notin E(G)$ であり, 頂点 a_1 以外のすべての次数は異なっている. このとき, 頂点 b_1 の次数を求めよ.

この節の最後に, 整数列がグラフ的となる必要十分条件を与える. これは, 与えられた整数列がグラフ的かどうかを再帰的に判定するアルゴリズムを与えるものである.

定理 1.17 整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, ただし, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, がグラフ的であるための必要十分条件は,

$$d' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$$

がグラフ的であることである.

証明. 次数列 d' を持つグラフ G' が存在すれば, 新しい頂点を次数 $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1$ の頂点に辺で結ぶことにより, 次数列 d のグラフ G が構成できる.

一方, G を d を実現するグラフとし, v_i を次数 d_i の頂点とする.

$$k_G = |N_G(v_1) \cap \{v_{d_1+2}, \dots, v_n\}|$$

とおく. $k_G = 0$ のとき, すなわち, v_1 が $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ に隣接しているとき, G から v_1 を除去して得られたグラフの次数列が d' になる. そこで, $k_G > 0$ とする. このとき, $2 \leq i \leq d_1 + 1 < j \leq n$ なるある (i, j) に対して, v_1 は v_i と隣接せず, v_j と隣接している. $\deg(v_i) \geq \deg(v_j) \geq 1$ であるから, v_i の近傍には v_j と隣接しないもの (x とする) が存在する. グラフ $\tilde{G} = G - \{v_i x, v_1 v_j\} \cup \{v_1 v_i, v_j x\}$ を考えると, \tilde{G} の次数列は d となり,

$$k_{\tilde{G}} = |N_{\tilde{G}}(v_1) \cap \{v_{d_1+2}, \dots, v_n\}| < k_G$$

である. この変形を繰り返すことにより, 次数列 d であり, $k_{G_0} = 0$ を満たすグラフ G_0 が得られる. ■

上の証明の中では, k_G という数に関する数学的帰納法が用いられている. ($k_G = 0$ が目標とする状態であり, $k_G > 0$ ならば, k_G が減らせることを証明している.) このように, 異なる2つの状態が, ある変形を繰り返して, 変形できることを証明するとき, その2つの距離のようなものをうまく定義して, それがいずれでも減らせることを証明することは, このような問題における常套手段である.

定理 1.17 を使って, 次の整数列がグラフ的かどうか判定してみよう: $(4, 4, 3, 2, 1)$, $(4, 4, 3, 3, 2)$, $(5, 4, 3, 3, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 1, 1)$.

- $(4, 4, 3, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 1, 0) \rightarrow (1, 0, -1)$ これはグラフ的でない.
- $(4, 4, 3, 3, 2) \rightarrow (3, 2, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 0)$ これはグラフ的である.
- $(5, 4, 3, 3, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 2, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ これはグラフ的である.
- $(2, 2, 2, 2, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 2, 1, 1) = (2, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1) = (1, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ これはグラフ的である.

注意すべきことは, 定理 1.17 を適用する際, 整数列を非増加順序に並べておく必要があることである. 最初の3つの場合は自動的に非増加順序が保たれたが, 最後の数列の場合, 非増加順序への並べ替えを怠ると判定を間違ってしまう.

この節の最後に, グラフの次数列に関する応用問題を考えよう.

問題 1.18 自然数 p, q について, 縦 p 本と横 q 本の直線からなる碁盤を考える (図 1.13 参照.) 碁石の**対角変形**とは, 相異なる $i, j \in \{1, \dots, p\}$ と相異なる $s, t \in \{1, \dots, q\}$ に対して, 座標 (i, t) と (j, s) に置かれた2つの碁石を取り除き, (i, s) と (j, t) に置き換える変形操作である (図 1.14 参照). 異なる配置 A と B において, 碁石の対角変形により, A が B に変形できるための必要十分条件は, 対応する横線に同数の碁石が載っており, かつ, 対応する縦線にも同数の碁石が載っていることであることを証明せよ.

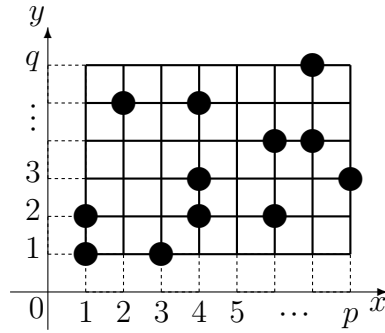


図 1.13: 碁石配置

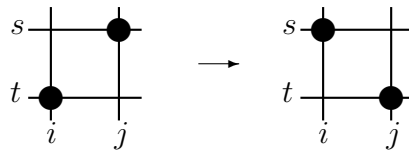


図 1.14: 対角変形

解答. 対角変形により, 任意の鉛直方向と水平方向の直線上の碁石の数は保存されるので, 必要性が成り立つことは明らかである.

十分性を示す. 碁盤上の碁石配置を A, B とし,

対応する縦線どうしと対応する横線どうしに並ぶ碁石の数が等しい……(*)

とする. そして, 与えられた A, B から決まる碁石配置 $T(A, B)$ を次のようにして作る.

A と B の碁石配置を見比べて, A では碁石が置かれ, B では置かれてない目には黒石を置く. A では置かれてなく, B では置かれている目には白石を置く. その他の目には何も置かない.

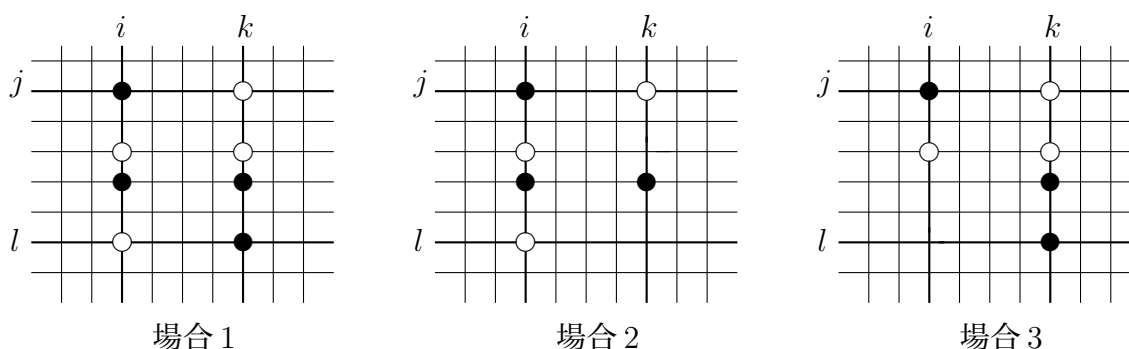
(*) より, $T(A, B)$ では

同じ直線上にある黒石と白石の数は同じ……(**)

であることに注意せよ. $|T(A, B)|$ で $T(A, B)$ の碁石の個数を表し, $|T(A, B)|$ に関する帰納法を用いる. $|T(A, B)| = 0$ ならば $A = B$ なので, 帰納法の第1段階は成立している. そして, (*) を満たす任意の碁石配置 C, D は, $T(C, D) < T(A, B)$ ならば, 対角変形を繰り返して移り合うと仮定する.

今, $|T(A, B)| > 0$ なので, 条件(**) より, $T(A, B)$ の j 番目の横線上の (i, j) に黒石, (k, j) に白石が置かれているとしてよい. (ただし, $i \neq k$ である.) さらに, 条件(**) より, i 番目の縦線上では, (i, j) を除くと, 白石の方が黒石の個数より1つ多く, k 番目の縦線上では, (k, j) を除くと, 黒石の方が白石の個数より1つ多い. したがって, $T(A, B)$ において (i, l)

と (k, l) に同色の碁石が置かれていないような l 番目の横線 (ただし, $l \neq j$) が存在し, それは次の3つのうちのいずれかになっている.



場合1. (i, l) に白石, (k, l) に黒石が置かれている (図左参照).

A において, (i, j) と (k, l) には碁石が置かれているが, (i, l) と (k, j) には置かれていない. この4点に関して対角変形を施した碁石配置を A' とおくと, $|T(A', B)| = |T(A, B)| - 4$ である. 任意の縦線と横線上の碁石の数は対角変形によって保存されるので, A' と B は (*) を満たしている. したがって, 帰納法の仮定により, A' と B は対角変形で移り合う. よって, A と B も対角変形を繰り返して移り合う.

場合2. (i, l) に白石が置かれ, (k, l) に何も置かれていない (図中央参照).

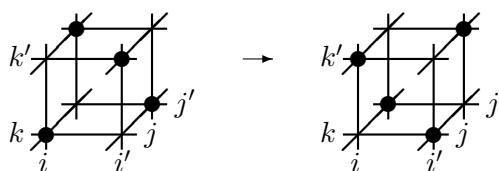
A と B 両方で (k, l) に碁石が置かれていれば, A において (i, j) と (k, l) 上の碁石に対角変形を施す. そうして得られた配置を A' とおくと, $|T(A', B)| = |T(A, B)| - 2$. 一方, A と B 両方で (k, l) に碁石が置かれていなければ, B において (i, l) と (k, j) 上の碁石に対角変形を施す. そうして, 得られた配置を B' とおくと, $|T(A, B')| = |T(A, B)| - 2$. いずれの場合も場合1と同様にして, A と B が対角変形を繰り返して移り合うことが結論できる.

場合3. (i, l) に何も置かれてなく, (k, l) に黒石が置かれている (図右参照).

$T(A, B)$ において A と B は対称的な関係なので, 場合2と同様に証明できる.

以上により, 証明終わり. ■

この問題を3次元に拡張できるかどうか考えてみよう. 2次元の対角変形は2次元立方体グラフ (第1.5節参照) の白頂点と黒頂点を入れ替える変形と思えるので, 3次元に拡張すると, $(i, j, k), (i', j', k), (i, j', k'), (i', j, k')$ という4点 (ただし, $i \neq i', j \neq j', k \neq k'$) を $(i, j, k'), (i', j', k'), (i, j', k), (i', j, k)$ に移す変形である (下图参照):



しかしながら、たちまち図 1.15 のような反例に出会うことになる。図 1.15 の 2 つの配置に対して、どの対応する直線上にも同数の碁石が載っていることが確かめられるが、どちらの配置にも対角変形できる 4 点を見つけることができないことがわかる。したがって、図の 2 つの配置を対角変形で移すことは不可能である。

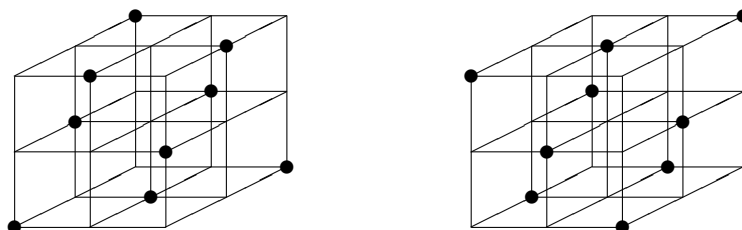


図 1.15: 対角変形で移り合わない 3 次元碁石配置

さて、碁石の対角変形の問題とグラフの次数列がどのように関係するかについて述べることにする。

問題 1.18 の碁石配置 A から、次のようにして 2 部グラフ $G_A(X, Y)$ を構成する: まず,

$$X = \{1, 2, \dots, p\} ; Y = \{1, 2, \dots, q\}$$

とする。碁石が位置 (i, j) に置かれているとき、 $i \in X$ と $j \in Y$ を辺で結ぶ。この定義により、直線 $x = k$ 上の A の碁石の数が $G_A(X, Y)$ における頂点 $k \in X$ の次数に等しく、直線 $y = l$ 上の A の碁石の数が $G_A(X, Y)$ における頂点 $l \in Y$ の次数に等しい。また、碁石の対角変形は $x_1, x_2 \in X$ と $y_1, y_2 \in Y$ に対して、辺 x_1y_1, x_2y_2 を x_1y_2, x_2y_1 に置きかえる変形である。(この変形を **X-変形** ということにする。) 変形の前後で、グラフの 2 部グラフ性が保存されていることに注意せよ。

したがって、問題 1.18 は、黒頂点どうしと白頂点どうしの頂点数が等しい 2 部グラフ $G_A(X, Y)$ と $G_B(X, Y)$ において、黒頂点どうしの次数列と白頂点どうしの次数列が等しいとき、グラフの 2 部グラフ性を保存して、X-変形により移り合うことを主張している。

また、定理 1.17 においては、その証明をなぞると、次の問題の解答が与えられる:

問題 1.19 次数列の等しい任意のグラフは X-変形を繰り返して移り合うことを証明せよ。

ヒント: グラフ G の頂点全体を v_1, \dots, v_n とし、 $\deg_G(v_1) \geq \dots \geq \deg_G(v_n)$ が成り立つとき、定理 1.17 では、X-変形により、 v_1 が $v_2, \dots, v_{\deg_G(v_1)+1}$ に隣接させられることを証明している。帰納法に載せられないか。

1.4 完全グラフ

この節では、完全グラフについていろいろ考えてみることにする。完全グラフの定義はすでに第 1.1 節で与えている。

命題 1.20 完全グラフ K_n の辺数は $\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ である. (ただし, $\binom{n}{k}$ は 2 項係数⁵ であり, n 個から k 個を選ぶ選び方の総数である.)

証明. 証明 (1). どの 2 点も辺で結ばれているので, K_n の辺数は $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ である.

証明 (2). n 個の頂点はすべて次数 $n-1$ である. したがって, 握手補題 1.14 より, 辺数は $\frac{1}{2}n(n-1)$ である.

証明 (3). K_1 の辺数は 0, K_2 の辺数は $0+1, \dots, K_{n-1}$ の辺数は $1+\dots+(n-2)$, K_n は K_{n-1} のすべての頂点に新しい頂点を結んでできるので, K_n の辺数は $(0+1+\dots+(n-2))+n-1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$ である. ■

問題 1.21 完全グラフ K_n の中の長さ 3 の閉路 C_3 の総数を求めよ. また, C_4 の総数と C_5 の総数を求めよ.

解答. 頂点を 3 つ選べば, ただ 1 つの C_3 が決定されるので, C_3 の総数は $\binom{n}{3}$ である. 整数 $k \leq n$ に対して, K_n の中の C_k の総数を求める. K_n から k 頂点選んで, その円順列の総数は $\binom{n}{k} \times (k-1)!$ である. 円順列の反対周りも同一の閉路に対応するので, C_k の総数は

$$\frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)! = \frac{n!}{2k(n-k)!}$$

である. ■

問題 1.22 $n_1, n_2 (n_1 \geq n_2)$ を $n_1 + n_2 = 30$ なる非負整数であるとする. このとき, $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ が最大となるのは, $n_1 = 30, n_2 = 0$ のときであることを証明せよ. また, 非負整数 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ が $n_1 + \dots + n_k = n$ を満たすとき, $\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}$ が最大になるのはどのようなときか.

解答. (解析的アプローチ) $n_1 + n_2 = 30$ ($n_1 \geq n_2 \geq 0$) であるから, $n_2 = 30 - n_1$ ($15 \leq n_1 \leq 30$) を代入して,

$$\begin{aligned} \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} &= \frac{1}{2}n_1(n_1-1) + \frac{1}{2}n_2(n_2-1) \\ &= \frac{1}{2}(n_1^2 - n_1 + (30-n_1)^2 - (30-n_1)) \\ &= (n_1 - 15)^2 + 210. \end{aligned}$$

これは $n_1 = 30$ のときに最大値 435 を取る. (途中計算は省略しているが, かなりの手間である.) ■

(離散的アプローチ) $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ は, 命題 1.20 より, K_{n_1} の辺数と K_{n_2} の辺数の和である. $n_2 \geq 1$ ならば, $|E(K_{n_1+1})| + |E(K_{n_2-1})| > |E(K_{n_1})| + |E(K_{n_2})|$ であるから, $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ が最大ならば, $n_1 = 30, n_2 = 0$ である. 最大値は $\binom{30}{2} = 435$ である.

全く同じ議論により, $K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \dots \cup K_{n_k}$ の辺数が最大になるのは, $n_1 = n, n_2 = \dots = n_k = 0$ のときであり, その最大値は $\binom{n}{2}$ である. ■

⁵ 高校では $\binom{n}{k} = {}_n C_k$ と表していた.

問題 1.23 整数 $n \geq 2$ に対して, 完全グラフ K_n を $n - 1$ 個の辺の交わりがない完全 2 部グラフ $K_{s,t}$ で被覆可能であることを証明せよ.

解答. n に関する数学的帰納法を用いる. $n = 2$ のとき, $E(K_2)$ は $E(K_{1,1})$ で被覆できるので, 問題の主張は正しい. K_n の辺が $n - 1$ 個の完全 2 部グラフで被覆可能かどうか考える. 考える K_n から 1 頂点 v を取り除いたグラフ K_{n-1} は, 帰納法の仮定により, $n - 2$ 個の完全 2 部グラフで被覆できる. v とそれに接続する辺からなるグラフは完全 2 部グラフ $K_{1,n-1}$ であるから, K_n の辺全体は $n - 1$ 個の完全 2 部グラフで被覆できる. ■

この証明は数学的帰納法が見事に成功した例であろう. 実は, 驚くべきことに, 完全グラフ K_n の辺は $n - 1$ 個未満の完全 2 部グラフによっては被覆できないことが示されている.

1.5 2部グラフ

まず, 与えられたグラフが 2 部グラフであるための必要十分条件について述べる.

命題 1.24 グラフ G が 2 部グラフであるための必要十分条件は, G が奇閉路を含まないことである.

証明. 2 部グラフは同色が隣接しないように, 頂点全体が白と黒で塗れる. そして, 2 部グラフの任意の閉路は白と黒の頂点を交互に通過するので, その長さは偶数になる.

十分性は G が連結のときについてのみ示せば十分である. グラフ G の任意の頂点 v_0 を固定する. そして, 次のように $X, Y \subset V(G)$ を定める:

$$\begin{aligned} X &= \{u \in V(G) : d_G(v_0, u) \text{ が偶数} \} \\ Y &= \{u \in V(G) : d_G(v_0, u) \text{ が奇数} \}. \end{aligned}$$

G は連結なので, $X \cup Y = V(G)$ であり, また, 明らかに, $X \cap Y = \emptyset$ である. G は 2 部グラフでないので, $x, x' \in X$ に対して, $xx' \in E(G)$ (または, $y, y' \in Y$ に対して, $yy' \in E(G)$) であるとしてよい. このとき, $\mathcal{P} = v_0 P x, x x', x' P' v_0$ は長さ奇数の閉歩道である (ただし, P は v_0 と x を結ぶ長さ偶数の道であり, P' は v_0 と x' を結ぶ長さ偶数の道である.) \mathcal{P} は閉路でないかもしれないが, \mathcal{P} には長さ奇数の道が含まれる. ■

命題 1.9 と命題 1.24 を組合せると, 次の定理が証明できる.

定理 1.25 平面を偶角形に分割するグラフは 2 部グラフである.

証明. 平面を偶角形に分割するグラフ G は 2 部グラフでないと仮定する. すると, 命題 1.24 により, G は奇閉路 C を持つ. しかしながら, 命題 1.9 により, C の内部は偶角形に分割できない. これは矛盾である. ■

同じような議論により, 次の命題が証明できる.

命題 1.26 外領域が5角形, その他の面はすべて3角形, かつ, すべての頂点の次数が偶数の平面グラフは存在しない.

証明. 命題の条件を満たすグラフ G が存在したと仮定する. すると, G の次数はすべて偶数なので, G の双対グラフ G^* の面はすべて偶角形である. したがって, 定理 1.25 により, G^* は2部グラフであり, $G^* = (X, Y)$ と表すことができる (X, Y は G^* の部集合である). さらに, G^* には次数5の頂点 v がただ1つ存在し, 残りの頂点の次数はすべて3である. 一般性を失うことなく, $v \in X$ としてよい. このとき, Y に属す頂点の次数はすべて3なので, Y から X に向かう辺の本数は3の倍数である. しかしながら, X には v があるため, X から Y に向かう辺の本数は3の倍数ではない. これは矛盾である. ■

次に, 立方体グラフについて述べる. 自然数 n に対して, グラフ Q_n が n 次元立方体グラフは次のように定義される (図 1.16 参照):

$$V(Q_n) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

$$E(Q_n) = \{xy : d_h(x, y) = 1, x, y \in V(Q_n)\},$$

ただし, $x = (a_1, \dots, a_n)$ と $y = (b_1, \dots, b_n)$ に対して, x, y のハミング距離 $d_h(x, y)$ は $d_h(x, y) = |\{i : a_i \neq b_i\}|$ のように定義される.

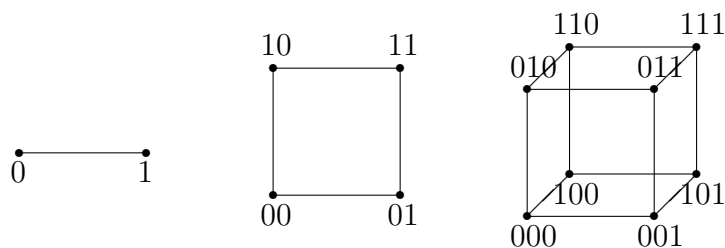


図 1.16: n 次元立方体グラフ

問題 1.27 立方体グラフ Q_n について, 次を証明せよ.

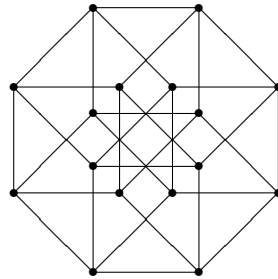
- (i) $|V(Q_n)| = 2^n$,
- (ii) $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$,
- (iii) $d(Q_n) = n$,
- (iv) Q_n は2部グラフであること.

証明. (i) 各頂点は (a_1, a_2, \dots, a_n) という形で与えられており, 各 a_i は0か1なので.
(ii) 各頂点の次数は n である. (i) より, Q_n の頂点数は 2^n だから, 握手補題より, $|E(Q_n)| = n \times 2^n / 2 = n2^{n-1}$.

(iii) $(0, 0, \dots, 0)$ と $(1, 1, \dots, 1)$ のハミング距離は n であり, どの 2 頂点間の距離は n 以下である.

(iv) 各頂点 (a_1, \dots, a_n) に対して, 値 $\sum_{i=1}^n a_i$ を考える. その値が偶数のものを黒に塗り, 奇数のものを白で塗る. 同色の頂点は隣接しないので, Q_n は 2 部グラフである. ■

問題 1.28 次の図は 4 次元立方体グラフ Q_4 である. 上のように, Q_4 の頂点全体に長さ 4 の 0, 1 の列を与えよ.



1.6 補グラフ

グラフ G に対して, G の補グラフ \overline{G} とは,

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &= V(G) \\ E(\overline{G}) &= \{uv : uv \notin E(G)\} \end{aligned}$$

を満たすものである. 明らかに, $\overline{\overline{G}} = G$ である. 特に, $G = \overline{G}$ となるグラフを自己補グラフという (図 1.17 参照). 1 頂点からなるグラフは自己補グラフではないとする.

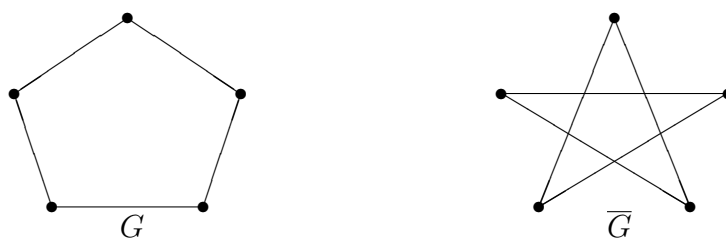


図 1.17: 自己補グラフ C_5

命題 1.29 任意のグラフ G において, G または \overline{G} は連結である.

証明. グラフ G が非連結のとき, \overline{G} が連結であることを示せばよい. G の連結成分を H_1, \dots, H_k とおけば, \overline{G} は完全 k 部グラフ $K_{|V(H_1)|, \dots, |V(H_k)|}$ を全域部分グラフとして含む. これは連結だから, \overline{G} も連結である. ■

系 1.30 自己補グラフは連結である.

証明. 非連結な自己補グラフ G が存在すれば, G は命題 1.29 を満たさない. 矛盾. ■

命題 1.31 $n \geq 2$ 頂点の自己補グラフが存在するための必要十分条件は, $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ である.

証明. G が自己補グラフなら, $|E(G)| = |E(\overline{G})|$ である. また, 命題 1.20 により, $|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \frac{1}{2}n(n-1)$ である. したがって, $|E(G)| = \frac{1}{4}n(n-1)$ であり, これが整数になるためには, $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ が必要である.

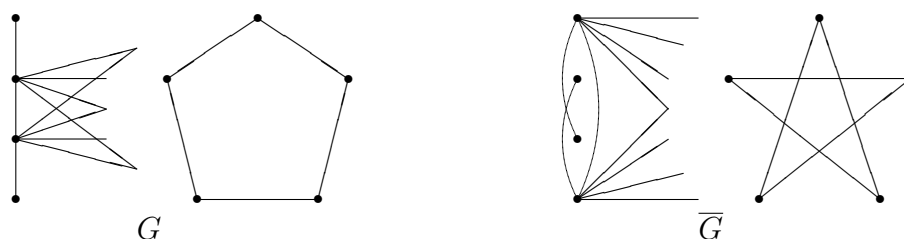


図 1.18: 自己補グラフ構成法

十分性を示す. 頂点数 4 の道 $P_4 = v_1v_2v_3v_4$ が自己補グラフになることは容易に確かめられる. さらに, 図 1.17 の C_5 は 5 頂点の自己補グラフである. 今, n 頂点の自己補グラフ H が存在するとき, $n+4$ 頂点の自己補グラフが存在することを証明すればよい. P_4 の v_2, v_3 から H のすべての頂点に辺を結んで得られるグラフを K とすると, K は自己補グラフである (図 1.18 参照). ■

発展的な話題として, 切断点を持つ自己補グラフの構造について考える.

命題 1.32 自己補グラフ G が切断点を持てば, G は次数 1 の頂点を持つ.

証明. v を G の切断点とする. $G-v$ の連結成分数を k とすると, $\overline{G-v}$ は完全 k 部グラフを含む. G が次数 1 の頂点を持たないとすると, $\overline{G-v}$ の各部集合の大きさは 2 以上であり, 2-連結である. $\deg_{\overline{G}}(v) \geq 2$ なら, G も 2-連結であり, G が自己補グラフであることに反する. したがって, 系 1.30 より, $\deg_{\overline{G}}(v) = 1$ である. ■

命題 1.31 において, 頂点数 4 の道 $v_1v_2v_3v_4$ の内点 v_2, v_3 から残りのすべての頂点に辺を結ぶという操作 (4-道の付加という) によって, ある自己補グラフから頂点数がちょうど 4 大きい自己補グラフを構成した. しかし, この操作で得られる自己補グラフはすべて切断点を持つ. 次の定理は, ある意味で, その逆も成り立つと主張する驚くべき結果である:

定理 1.33 G を切断点を持つ n 頂点からなる任意の自己補グラフとする. このとき, G は空グラフ, 自明なグラフ, または $n-4$ 頂点からなる自己補グラフ H から, 4-道の付加により得られる.

証明. 命題 1.32 より, G は次数 1 の頂点 u を持つ. G は自己補グラフだから, G は次数 $n-2$ の頂点 u' を持つ. $\varphi: G \rightarrow \overline{G}$ を同型写像とする.

最初に, G は u の他に次数 1 の頂点 v を持つことを証明する. もし, u が唯一の次数 1 の頂点ならば, $\varphi(u) = u'$, かつ, $\varphi(u') = u$ である. このとき, u と u' は G と \overline{G} のどちらか一方で隣接していて, 他方では隣接していないことになり, φ が同型写像になることに矛盾する. したがって, G には相異なる次数 1 の頂点 u と v が存在し, さらに, G において, 次数 $n-2$ の相異なる 2 頂点 $u' = \varphi(u)$ と $v' = \varphi(v)$ も存在する.

G における u, v の唯一の近傍をそれぞれ u_1, v_1 とする. $A = V(G) - \{u, v, u_1, v_1\}$ とおく. もし, $A = \emptyset$ なら, $V(G) = \{u, v, u_1, v_1\}$ であり (すなわち, $\{u_1, v_1\} = \{u', v'\}$), G 自身が頂点数 4 の道である. したがって, $n = 4$ のとき, H は空グラフとなり, 定理は成り立つ.

$A \neq \emptyset$ としてよい. $\deg_G(u) = \deg_G(v) = 1$ より, 任意の $x \in A$ に対して, $\deg_G(x) \leq n-3$ である. したがって, $u', v' \notin A$ であり, $\{u_1, v_1\} = \{u', v'\}$ である. 一般性を失うことなく, $u_1 = u'$ かつ $v_1 = v'$ とする. その上, u_1 は v 以外の G のすべての頂点に隣接しており, v_1 は u 以外の G のすべての頂点を隣接している.

上の観察により, 頂点数 4 の道 $uu'v'v$ が見つかり, $\deg_G(u) = \deg_G(v) = 1$ と $\deg_G(u') = \deg_G(v') = n-2$ が成り立ち, すべての $x \in A$ に対して, $2 \leq \deg_G(x) \leq n-3$ である. だから, φ は $\{u, u', v', v\}$ を $\{u, u', v', v\}$ に移す. 道 $u, u'v', v$ は自己補グラフであり, u' と v' のそれぞれは A のすべての頂点に隣接しているので, G の中で A によって誘導される部分グラフ $\langle A \rangle = H$ は自明であるか, 自己補グラフである. ゆえに, $n \geq 5$ に対して, 定理が成り立つ. ■

第2章 グラフの連結性

日本全国の電話線網を考えよう。各都市を頂点とし、都市どうしが直接電話線で結ばれているとき、対応する頂点どうしを辺で結ぶことにより、電話線網はグラフとして表現できる。もちろん、このグラフは連結である(そうでなければ、ある都市から別のある都市に電話がかけられない。)

たとえ、今、大阪の交換機が中継不可能になったとしても、それくらいでは全国の電話線網全体が分断されることないだろう。このことは、電話線網に対応するグラフから1点取り除いても、残りのグラフがまだ連結であることを意味している。電話線網全体の安定を確保するためには、ある程度の数の都市が中継不可能になっても、機能するネットワークが必要がある。グラフに例えると、「切れにくい」グラフである必要があるというわけである。この章では、この「切れにくさ」について考えることにする。

2.1 連結度

グラフ G に対して、 $S \subset V(G)$ が**頂点切断**であるとは、 $G - S$ が非連結になることである。 G の頂点数が $k + 1$ 以上で、 G の任意の頂点切断 S に対して、 $|S| \geq k$ のとき、 G は k -**連結**であるという。完全グラフ K_n には、頂点切断は存在しないが、 K_n は $(n - 1)$ -連結であるとする。これらを統一的に扱いたければ、次のようにいうことができる: 「グラフが k -連結であるとは、どのような $k - 1$ 点以下の頂点を取り除いても、残りのグラフが非連結なグラフでも自明なグラフでもないことである。」また、グラフ G が k -連結であれば、 G は $(k - 1)$ -連結であることがわかる ($k \geq 1$)。したがって、 G が k -連結であるところの k の最大値が意味をなす。

グラフ G の**連結度**は、 $\kappa(G)$ と表し、

$$\kappa(G) = \max\{k : k\text{-連結である}\}$$

と定義される。グラフ G が連結であることと、 $\kappa(G) \geq 1$ は同値である。

問題 2.1 図 1.1, 3.1, 3.2, 5.1 のグラフの連結度を求めよ:

問題 2.2 グラフ G において、連結度 $\kappa(G)$ と最小次数 $\delta(G)$ には、

$$\kappa(G) \leq \delta(G)$$

が成り立つことを証明せよ。

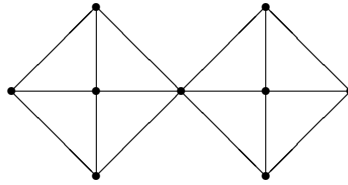


図 2.1: $\kappa(G) < \delta(G)$ なるグラフ

証明. $\delta(G) = k$ ならば, 次数 k の頂点 v の近傍を取り除くと, G から v を切り離すことができる. したがって, $\kappa(G) \leq k$ である.

しかしながら, 図 2.1 が示すように, $\kappa(G) = k$ は一般には成り立たない. ($\delta(G) = 3$ であるが, $\kappa(G) = 1$ である. $\delta(G) - \kappa(G)$ がいくらでも大きくできることを示せるか?) ■

2.2 メンガーの定理

グラフ G の非隣接 2 頂点 u, v に対して, $S \subset V(G) - \{u, v\}$ が u, v を分離するとは, $G - S$ において u, v が別々の連結成分に含まれていることである. G の u, v 間の局所連結度とは, $\kappa_G(u, v)$ と表し,

$$\kappa_G(u, v) = \min\{|S| : S \text{ は } u, v \text{ を分離する}\}$$

と定義する. G の連結度 $\kappa(G)$ と局所連結度 $\kappa_G(u, v)$ の関係は次のようになる:

$$\kappa(G) = \max\{\kappa_G(u, v) : uv \notin E(G)\}.$$

グラフ G と相異なる $u, v \in V(G)$ に対して, P と P' を u, v を結ぶ道とする. このとき, P と P' が内素であるとは, P と P' が端点 u, v 以外で交わらないことである. 簡単のため, u と v を結ぶ道を (u, v) -道ということにする.

定理 2.3 (メンガー) G をグラフとし, u, v をその非隣接 2 頂点であるとする. このとき, $\kappa_G(u, v) \geq k$ であるための必要十分条件は, G において, u, v を結ぶ k 本の内素な道が存在することである.

この問題の証明に移る前に, 図 2.2 のグラフを用いて, 必要性と十分性のどちらが明らかかを考えよう.

証明. G が k 本の内素 (u, v) -道 P_1, \dots, P_k を持つとき, u と v を分断するには P_1, \dots, P_k のすべての道を破壊しなければならない. (P_1, \dots, P_k は内素なので, 1 頂点を取り除いたとき, 同時に 2 つ以上の道が破壊されることはない.) したがって, $\kappa_G(u, v) \geq k$ である.

逆に, $\kappa_G(u, v) \geq k$ とするとき, k 本の内素 (u, v) -道が存在することを, $|V(G)|$ に関する帰納法により示す. まず, $\deg_G(u), \deg_G(v) \geq k$ である (そうでなければ, u または v の近傍が u, v を分離する頂点集合で, 大きさが $k - 1$ 以下となり, $\kappa_G(u, v) \geq k$ に矛盾する). こ

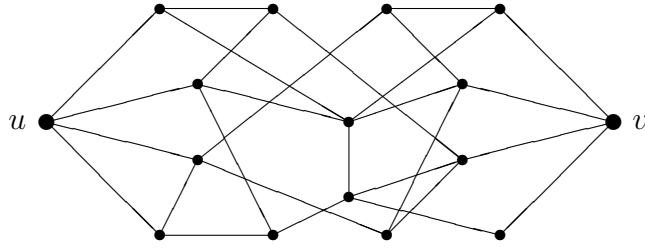


図 2.2: $\kappa_G(u, v)$ と内素 (u, v) -道の本数の関係は?

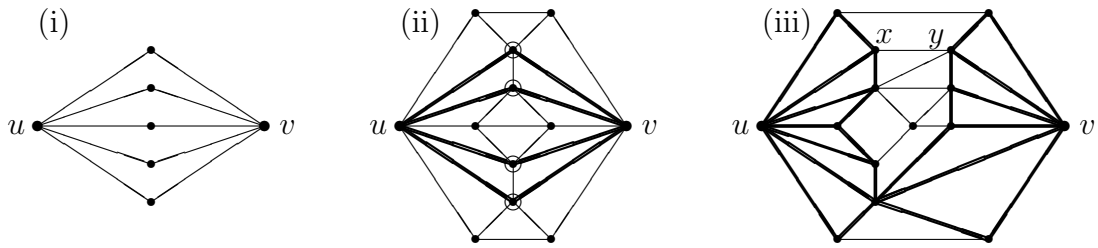


図 2.3:

の状況で頂点数が最も少ない場合は、 $\deg_G(u) = \deg_G(v) = k$ であり、 $N_G(u) = N_G(v)$ である。(図 2.3(i) 参照). このとき、明らかに k 本の内素 (u, v) -道を持つ.

そうでない場合を考える. もし、 $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq k$ ならば、 k 本の内素 (u, v) -道を取ることができるので(図 2.3(ii) 参照)、 $|N_G(u) \cap N_G(v)| \leq k - 1$ であるとする. このとき、 $\langle \{u\} \cup N_G(u) \rangle$ にも $\langle \{v\} \cup N_G(v) \rangle$ にも含まれない辺 xy が存在する(図 2.3(iii) 参照). G において辺 xy を縮約したグラフを $G' = G/xy$ とする.(辺 $xy \in E(G)$ は G' において、頂点 $[xy] \in V(G')$ に変形されているとする.)

(i) $\kappa_{G'}(u, v) \geq k$ の場合. このとき、帰納法の仮定により、 G' は k 本の内素 (u, v) -道 P'_1, \dots, P'_k を持つ. どの P'_i も頂点 $[xy]$ を通過していなければ、 P'_1, \dots, P'_k は G の内素 (u, v) -道である. ある P'_i が $[xy]$ を通過していれば、 P'_i において $[xy]$ を xy に復元したものと、 P'_i 以外の $n - 1$ 本の (u, v) -道が G の内素 (u, v) -道になる.

(ii) $\kappa_{G'}(u, v) < k$ の場合. G' の u, v を分離する大きさ $k - 1$ 以下の頂点集合を S' とおく. このとき、 $[xy] \in S'$ である. そうでなければ、 S' が G においても u, v を分離し、 $\kappa_G(u, v) \geq k$ に反する. したがって、 G において、 x, y は u, v を分離する大きさちょうど k の頂点切断 S に含まれる. u, v を含む $V(T_u) \cap V(T_v) = S$ なる G の部分グラフをそれぞれ T_u, T_v とおく.(ただし、 $V(T_u) \cup V(T_v) = V(G)$ である.) T_u において、 S に含まれるすべての頂点に v' を結んで得られるグラフを G_u とすると、 $\kappa_{G_u}(u, v') \geq k$ である(G_u が u, v' を分離する S_v で、 $|S_v| \leq k - 1$ なるものを持つと、 S_v は G においても u, v を分離することになり、 $\kappa_G(u, v) \geq k$ に矛盾する). 辺 xy の選び方から、 $|V(G_u)| < |V(G)|$ であり、帰納法の仮定から、 G_u において、 u と v' を結ぶ k 本の内素 (u, v) -道を取ることができる. 同様の議論によ

り, T_v において, S に含まれるすべての頂点に u' を結んで得られるグラフを G_v とすると, G_v において, u' と v を結ぶ k 本の内素 (u, v) -道を取ることができる. G_u において, S と u を結ぶ k 本の道と G_v において, S と v を結ぶ k 本の道とを合わせると, G における k 本の内素 (u, v) -道を構成することができる. ■

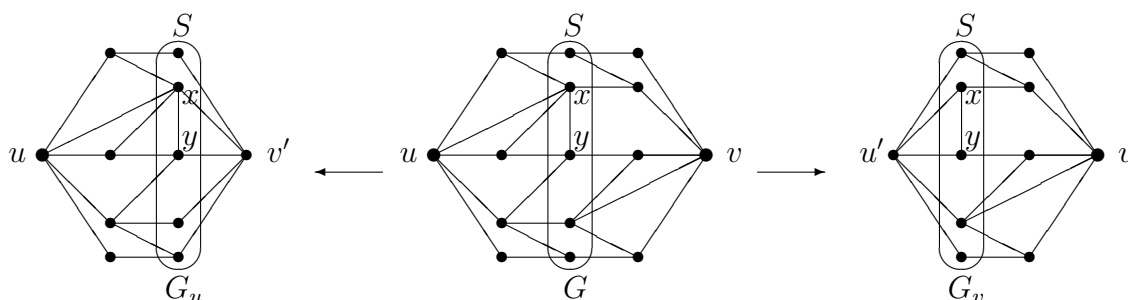


図 2.4: G_v と G_u

2.3 k -連結グラフの性質

この節では, メンガーの定理を応用して, k -連結グラフを特徴付け, k -連結グラフの性質を考える.

定理 2.4 (ホイットニー) グラフ G が k -連結であるための必要十分条件は, G の任意の 2 頂点に対して, それらを結ぶ k 本の内素な道が存在することである.

証明. 十分性について. G が k -連結でないとき, ある頂点切断 $S \subset V(G)$ で $|S| \leq k-1$ なるものが存在する. $G-S$ において, 別々の連結成分に属す頂点 u, v を考えると, $\kappa_G(u, v) \leq k-1$ である. メンガーの定理より, G において, k 本の内素 (u, v) -道を取ることができない.

必要性について. $u, v \in V(G)$ を任意に取る. $uv \notin E(G)$ のとき, メンガーの定理より, k 本の内素 (u, v) -道を取ることができる. $uv \in E(G)$ のとき, $G' = G - uv$ を考える. G' が $(k-1)$ -連結なら, $\kappa_G(u, v) \geq k-1$ であり, メンガーの定理より, G' には $k-1$ 本の内素 (u, v) -道が存在し, それに辺 uv を加えれば, G の k 本の内素 (u, v) -道になる.

したがって, G' が $(k-1)$ -連結になることを証明すればよい. そうでなければ, G' は u, v を分離する大きさが $k-2$ 以下の頂点切断 S' を持つ. G は k -連結だから, $|V(G)| \geq k+1$ であり, ある頂点 $x \in V(G') - S' - \{u, v\}$ が存在する. x は G において u, v のどちらか一方には隣接していないので ($xu \notin E(G)$ とする), $S' \cup \{v\}$ が x と u を分離し, G が k -連結であることに反する. ■

定理 2.5 (ディラク) $k \geq 2$ を整数とする. グラフ G が k -連結ならば, G は任意に指定された k 頂点を通る閉路を持つ. ただし, 通過する順番は指定できない.

証明. $k \geq 2$ に関する帰納法を用いる. $k=2$ のとき, ホイットニーの定理より, 任意の 2 頂点を結ぶ 2 本の内素な道 P, P' が取れる. $P \cup P'$ が求める閉路である.

$k \geq 3$ のとき, 頂点 v_1, v_2, \dots, v_k が指定されたとする. G は $(k-1)$ -連結でもあるから, 帰納法の仮定によって, v_1, \dots, v_{k-1} を通る閉路 C が存在する. (適当に添え字を付け替えて, v_1, v_2, \dots, v_{k-1} がこの順で C 上に現れるとする.) v_k が C 上にあれば, 証明終わりであるから, $v_k \notin V(C)$ であるとする. C 上のすべての頂点に新しい頂点 x を結んだグラフを G' とする. C に v_1, \dots, v_{k-1} のみが存在するとき, G' は $(k-1)$ -連結であり, そうでなければ, G' は k -連結である.

前者の場合, ホイットニーの定理により, G' は $k-1$ 本の内素 (v_k, x) -道を持つ. そのうちの v_k と C 上の v_1, \dots, v_{k-1} を結ぶ部分を P_1, \dots, P_{k-1} とすると, $(C - v_1v_2) \cup P_1 \cup P_2$ が求める閉路である.

後者の場合, G' は k 本の内素 (v_k, x) -道を持つ. その k 本の道が v_k を出発し, 最初に C に到達した点を u_1, u_2, \dots, u_k とする. そして, 各 i に対して, v_k から u_i までの道を Q_1, \dots, Q_k とする. C 上の v_i と v_{i+1} を両端点とする弧を $[v_i, v_{i+1}]$ とすると (添え字は $\text{mod } k-1$ でとる), ある弧では, u_1, \dots, u_k の 2 つ以上を含むものが存在する. 弧 $[v_i, v_{i+1}]$ が u_i, u_j を含むとすると, $(C - E([u_i, u_j]) \cup Q_i \cup Q_j)$ が求める閉路である. ■

この定理は**鳩の巣原理**¹ が使われている. デイラクの定理の逆は一般には成り立たない: 長さ k の閉路 C_k を考えよ.

もう 1 つ簡単な演習問題を考えよう.

問題 2.6 任意のグラフ G に対して,

$$|V(G)| \geq \kappa(G)(d(G) - 1) + 2$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $d(G)$ は G の直径を表す.

解答. $u, v \in V(G)$ を $d_G(u, v) = d(G)$ なる頂点とする. 定理 2.4 より, $\kappa(G)$ 本以上の内素 (u, v) -道 $P_1, \dots, P_{\kappa(G)}$ が存在する. $d_G(u, v) = d(G)$ なので, 各 P_i の長さは $d(G)$ 以上である. P_1, \dots, P_k は内素なので,

$$|V(P_1 \cup \dots \cup P_k)| \geq \kappa(G)(d(G) - 1) + 2$$

である. $P_1 \cup \dots \cup P_k \subset G$ より,

$$|V(G)| \geq |V(P_1 \cup \dots \cup P_k)| \geq \kappa(G)(d(G) - 1) + 2$$

が成り立つ. ■

¹ 鳩が k 羽以上, 巣が $k-1$ 個以下ならば, 鳩が 2 羽以上入っている巣が存在するという数学的原理.

第3章 グラフの中の経路

グラフ G のオイラー回路とは G の各辺をちょうど1回ずつ通る閉歩道である。一方, G のハミルトン閉路とは, G のすべての頂点をちょうど1回ずつ通る閉路である。この章では, グラフ中のこの2種類の巡回的経路について述べる。

3.1 オイラー回路

ある図形が一筆描き可能とは, 一度, 鉛筆を紙に立てたならば, 鉛筆を離すことなく, かつ, 同じ辺を2度以上たどることなく, その図形が描ききれることである。このとき, 描かれた図形は点と線からなるもの, いわゆるグラフ, である。グラフ G が一筆描き可能であるとは, すべての辺をちょうど1回ずつたどる歩道が存在することである。

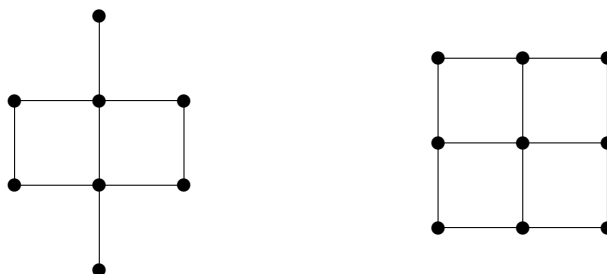


図 3.1: 一筆描き可能か

次の定理はグラフがオイラー回路を持つ(すなわち, 始点と終点が一致するように一筆描きが可能)ための必要十分条件をあたえるものである。

定理 3.1 グラフ G がオイラー回路を持つための必要十分条件は, G は連結であり, かつ, G の各頂点の次数が偶数であることである。

この定理から, 直ちに, 次の一筆描きの定理を導くことができる。これを定理 3.1 の定理の証明の後に示す。

定理 3.2 グラフ G が一筆描き可能であるための必要十分条件は, G は連結であり, かつ, G の奇点の数が0か2であることである。

定理 3.1 の証明に入る. しかし, この定理において, 必要性と十分性のどちらが明らか考えて欲しい. (しばしば, 間違う人がいる.)

定理 3.1 の証明. 必要性は明らかである. グラフ G がオイラー回路を持てば, まず, G は連結である. また, G のすべての辺にオイラー回路に沿って矢印が付けられるので, 任意の頂点 v において, v を出発する矢印と v に到達する矢印の数は同じになる. したがって, v の次数は偶数である.

十分性を証明する. G の次数の総和に関する帰納法を用いる. G が連結であり, かつ, すべての頂点の次数が 2 であれば, G は閉路であり, 明らかに, オイラー回路を持つ. したがって, G は次数 4 以上の偶点を持つとする. G の任意に固定された頂点 v_0 を出発し, 同一の辺は 2 度以上たどらない歩道 W を延ばせるだけ延ばす. まず, W は v_0 で終わることがわかる. なぜなら, それ以外の頂点 v の次数は偶数なので, W が v に進入したら, v から退出する辺が常に残っているからである. 今, $G' = G - E(W)$ とおき, G' の自明でない連結成分を H_1, \dots, H_k とする. 各 H_i は連結である. また, 各頂点に接続する辺において, W の使ったものは偶数本であるから, 各 H_i のすべての頂点の次数は偶数である. したがって, 帰納法の仮定により, H_i はオイラー回路 W_i を持つ. 今, G において, W_1, \dots, W_k は交わりがなく, G の任意の辺は W またはある W_i に含まれていることに注意せよ. G は連結なので, W と各 W_i に共通に含まれる頂点 v_i を持つ. W 上に v_1, \dots, v_k はこの順で現れるとしてよい. このとき, v_0 を出発し, W に沿って進む. そして, v_1 に到着したら, W_1 に沿って進み, W_1 上で再び v_1 に到着したら, また W に沿って進むことにする. そして, W 上で v_2 に到着したら, また同様の操作を W_2 に関して行う. これを繰り返し, 各 v_i で W_i に乗り換えることにより, $W \cup W_1 \cup \dots \cup W_k$ から G のオイラー回路を得ることができる. ■

定理 3.1 \Rightarrow 定理 3.2 の証明. 定理 3.2 を証明する. まず, グラフ G が一筆描き可能ならば, その一筆描きの経路の始点と終点が一致するかしないかによって, グラフの奇点の数が 0 か 2 になる.

一方, グラフ G が連結であり, 奇点を持たなければ, 定理 3.1 より, G はオイラー回路を持ち, 始点と終点が一致するように一筆描きが可能である. もし, G がちょうど 2 つの奇点 u, v を持つならば, グラフ $G' = G \cup uv$ のすべての次数は偶数になり, 定理 3.1 により, G' はオイラー回路 W を持つ. G の経路 $W - uv$ が u, v を結ぶ G の一筆描きの経路である. ■

さて, 定理 3.1 を強めてみよう. 定理 3.1 により, 各頂点が偶次数の連結グラフはオイラー回路を持つことが証明された. そのような平面グラフにおいては, なるべく **自己交差** (すなわち, 自分自身を横切ること) のないオイラー回路が見つけたい.

定理 3.3 G を連結な平面グラフで, 各頂点の次数が偶数であるものとする. このとき, G は自己交差のないオイラー回路を持つ.

構成的な証明と帰納法による証明の 2 通りを行う.

構成的な証明. G の双対グラフ G^* において, 各面が偶角形になっていることがわかる. したがって, 定理 1.25 より, G^* は 2 部グラフである. ゆえに, G の面全体を, 辺で接する面は互いに異なる色を持つように, 2 色 (白と黒とする) で塗れる.

B_1, \dots, B_k を黒で塗られた G^* の面全体とする. 各 B_i の境界閉歩道を ∂B_i と表す. すると, 任意の辺 $e \in E(G)$ はただ1つの ∂B_i にちょうど1回だけ現れる.

グラフ \mathcal{B} を次のように定義する:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{B}) &= B_i \quad (i = 1, \dots, k) \\ E(\mathcal{B}) &= \{B_i B_j : \partial B_i \cap \partial B_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

G は連結なので, \mathcal{B} も連結である. ゆえに, \mathcal{B} は全域木 $T_{\mathcal{B}}$ を持つ.

$B_i B_j \in E(\mathcal{B})$ なる B_i, B_j に対して, 1つの頂点 $v_{ij} \in \partial B_i \cap \partial B_j$ を適当に選ぶ. 次のようにして, $\cup_{i=1}^k \partial B_i$ の中に求めるオイラー回路 W を見つけることができる. 適当に番号を付け替えて, 全域木 $T_{\mathcal{B}}$ は頂点 B_1 から次数1の頂点 B_i を次々と加えることにより得られるとしてよい ($i = 2, \dots, k$).

このとき, $W_1 = \partial B_1$ とする. また, W_{i-1} がすでに定義されているとき, W_{i-1} に ∂B_i を頂点 $v_{i1} \in V(G)$ (ただし, $B_1 B_i \in E(T_{\mathcal{B}})$ である) に沿って縫い付ける. $W_{i-1} \cup \partial B_i$ の中に自己交差を持たない唯一の閉歩道が見つかる. それを W_i とする.

この手順により, 最終的に, G の自己交差のないオイラー回路 $W = W_k$ が得られる. ■

帰納法による証明. G が多重辺やループを持つ場合も同時に証明する. G の辺数に関する帰納法を用いる.

G のすべての次数が2ならば, 定理は明らかに成り立つ. ゆえに, G は次数4以上の頂点 v を持つ. v に接続する辺を v のローテーションに関して e_1, \dots, e_l とする (ただし, $e_i = vv_i$ とする). v が G の切断点のときは, $G - \{e_1, e_2\}$ が連結になるようにとれ. (もし, $G - \{e_1, e_2\}$ が非連結なら, $G - \{e_2, e_3\}$ が連結になるから, そのように e_1, e_2 を選ぶことができる.)

さて, グラフ $G' = (G - \{e_1, e_2\}) \cup v_1 v_2$ を考え, 自然に得られる G' の平面埋め込みを考える. G' は G より辺数が少なく, また, 連結であり, 各頂点の次数は偶数だから, 帰納法の仮定により, 自己交差のないオイラー回路 W' を持つ. $W = (W' - v_1 v_2) \cup \{e_1, e_2\}$ が G の自己交差のないオイラー回路である. ■

この帰納法による証明は, 平面性を無視すると, 定理3.1の簡単な証明になっていることがわかる.

3.2 ハミルトン閉路

前節では, グラフがオイラー回路を持つための必要十分条件を与えた. これは, かなり単純なものであった. その類推から, ハミルトン閉路の存在のための必要十分条件も, 同様に単純であると思われるかもしれない. しかし, それは大違いである. それは, かなり見通しの暗い未解決問題である.

問題 3.4 図3.2のグラフがハミルトン閉路を持つかどうかを考えてみよう.

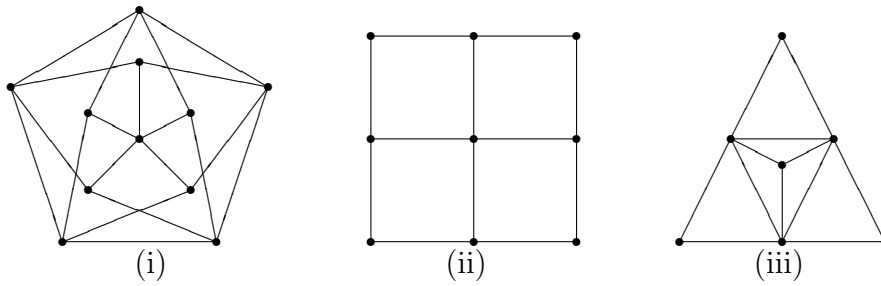
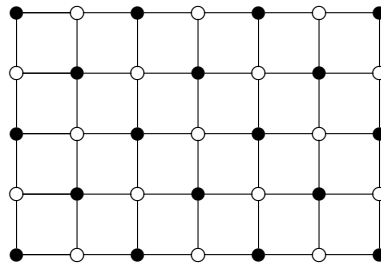


図 3.2: ハミルトン閉路を持つか

問題 3.4 要求される答は YES か NO である. しかしながら, YES の場合はある 1 通りのたどり方を示せばよいのに対し, NO の場合, いかなるたどり方をしても各頂点をちょうど 1 回ずつたどる閉路が存在しないことを証明しなければならない.

問題 3.4 の (i) について. (i) はハミルトン閉路を持つ. しかし, (i) のハミルトン閉路を発見するのは結構骨の折れる問題であろう. 読者に任せることにする. (たった 11 頂点のグラフでもハミルトン閉路を探すのはたいへんなことがわかる.) ■

(ii) は格子形である. 次のようにして, 奇数 \times 奇数の格子形はすべてハミルトン閉路を持たないことがわかる.



格子形は上図のように, 隣接 2 頂点が異なる色を持つように, 頂点全体が白と黒で塗れる. すなわち, 2 部グラフである. (この事実は定理 1.25 から導かれる.) このとき, 格子形グラフのすべての閉路は白頂点と黒頂点を交互に通過するので, このグラフがハミルトン閉路を持つならば, 白頂点と黒頂点の個数が一致していなければならない. つまり, 次の命題が成り立つ.

命題 3.5 2 部グラフ $G = (X, Y)$ がハミルトン閉路を持つならば, $|X| = |Y|$ である. ■

問題 3.4 の (ii) について. (ii) のグラフは 2 部グラフである. そして, 命題 3.5 により, 奇数 \times 奇数の格子形グラフの頂点数は奇数なので, 白頂点と黒頂点の個数が一致することはできない. ■

(iii) のグラフは奇閉路を含むので, (ii) と同様にハミルトン閉路が存在しないことを証明できそうにない. (iii) のハミルトン性を調べるために, グラフのタフネスという概念を紹介する. (そんなことをしなくても, 次数 2 の頂点に着目すればよいが.)

t を非負実数とする. グラフ G が, $G - S$ が非連結になるような任意の $S \subset V(G)$ について, $t \leq \frac{|S|}{\omega(G-S)}$ を満たすとき, G は t -タフであるという. すなわち, 任意の $s \geq t$ に対して, G が s -タフならば t -タフである.

$$t(G) = \max\{t : G \text{ は } t\text{-タフ}\} = \min_S \frac{|S|}{\omega(G-S)}$$

を G の **タフネス** という. G が非連結のとき, $S = \emptyset$ に対して, $\frac{|S|}{\omega(G-S)} = 0$ であり, $t(G) = 0$ である. また, 完全グラフ K_m には $\omega(K_m - S) > 1$ となる $S \subset V(K_m)$ は存在しないので, $t(K_m) = \infty$ と定義する.

大雑把に言って, グラフ G のタフネスが高いとは, 「グラフが切れにくい」ことを意味する. したがって, タフネスが高ければ, グラフの至るところに辺があることになり, 結果的に, ハミルトン閉路を持ちやすい状況になっていると言える. グラフのタフネスが十分に高ければ, ハミルトン閉路を持つことが予想されている.

命題 3.6 グラフ G がハミルトン閉路を持つならば, G は 1-タフである.

証明. G が 1-タフでないと仮定する. このとき, ある $S \subset V(G)$ に対して, G から S を取り除いたグラフ $G - S$ の連結成分数は $|S|$ より多い, すなわち, $\omega(G - S) > |S|$. $G - S$ の連結成分を H_1, \dots, H_k とするとき ($k > |S|$), どの H_i と H_j も S の頂点を經由しない限り到達できないので, すべての H_1, \dots, H_k のすべての頂点を通過するためには, $|S|$ が足りないことになる. したがって, G はハミルトン閉路を持たない. ■

問題 3.4(iii) について. 図 3.2(iii) のグラフから次数 5 の 3 頂点を取り除いたグラフは, 4 個の孤立点からなるグラフである. したがって, このグラフは 1-タフでなく, 命題 3.6 により, (iii) のグラフはハミルトン閉路を持たない. ■

ペテルセン・グラフ P (図 3.3 参照) は明らかに 1-タフである. (P のタフネスが $\frac{4}{3}$ であることを確かめよ.) また, 以下の命題 3.7 で示すように, P はハミルトン閉路を持たない. したがって, 命題 3.7 により, 1-タフという条件はハミルトン閉路の存在に十分でないことがわかる.

命題 3.7 ペテルセン・グラフはハミルトン閉路を持たない.

解答. ペテルセングラフ P の外側の五角形に含まれる 5 頂点の集合を $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ とし, 内側の星型五角形の頂点の集合を $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ とおく (ただし, すべての i について $s_i t_i \in E(P)$). P の任意のハミルトン閉路 C は, S と T を結ぶ 5 辺のうちの偶数本, すなわち, 2 本か 4 本, を通ることになる. したがって, $s_1 t_1 \in E(C), s_2 t_2 \notin E(C)$ としてよい. これにより, C のたどり方がほぼ決定される (3-正則なので, v に接続する 3 辺 e_1, e_2, e_3 のうちの 1 本, e_1 , が C に含まれないなら, e_2, e_3 の両方が C に含まれることになるので). 証明の残りは読者に残す. ■

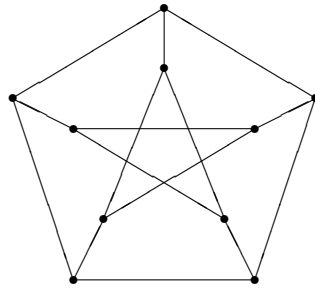


図 3.3: ペテルセン・グラフ

命題 3.6 の逆は成り立たないが, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ハミルトン閉路を持たない $(2 - \varepsilon)$ -タフグラフの存在が示されている. さらに同じ論文の中で, グラフ G が 2-タフならば, G の頂点全体はいくつかの閉路によって被覆できることが証明された. その閉路の個数が 1 つならハミルトン閉路になることから, 次の予想が, それ以降 10 年余り, 世界中に強く信じられていた.

予想 3.8 グラフ G が 2-タフならば, G はハミルトン閉路を持つ.

しかし, 近年, 次の反例が示された.

予想 3.8 の反例. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ハミルトン閉路を持たない $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$ -タフのグラフが存在する (図 7 参照).

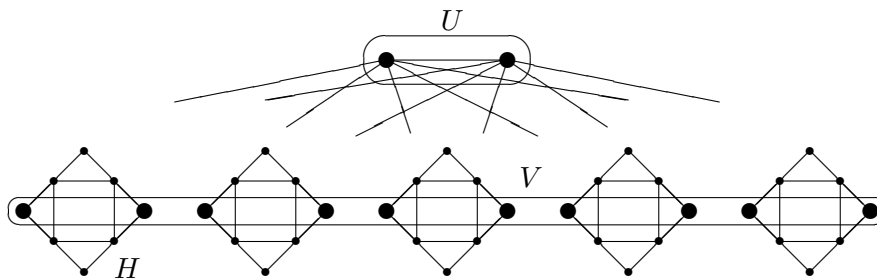


図 3.4: ハミルトン閉路のない 2-タフグラフ


ただし, 反例となるグラフは以下のように構成する. まず, l 個からなる頂点集合 U を用意する ($|U| = l$). そして, 2つの頂点がマークされた  という形のグラフ H を $2l + 1$ 個用意する. (各 H はマークされた 2 頂点を結ぶハミルトン道を持たないという事実を後で使う.) そして, U の頂点のそれぞれを他のすべての頂点と辺で結ぶ. さらに, すべての H のマークされた頂点の集合を V とし ($|V| = 4l + 2$), V のすべての頂点对を辺で結ぶ. (したがって, $U \cup V$ は完全グラフを誘導する.) 図 3.4 は $l = 2$ の場合を示している.

図 3.4 のグラフを G とする. U と各 H の次数 4 の頂点全体を取り除く. 取り除く頂点数は 22 で, 残るグラフの連結成分数は 11 であり, G のタフネスは 2 以下であること

がわかる. 実際, この切断が, 取り除く頂点数に対する残りのグラフの連結成分数の比を最も大きくする切断方法であり (チェックしてください), G のタフネスはちょうど 2 となる.

グラフ G がハミルトン閉路を持たないことを示す. そのため, G がハミルトン閉路 C を持つとする. このとき, $|U| = 2$ なので, $G - U$ と C の共通部分は高々 2 つの道になっているはずである. H は 5 つあるので, ある H では V に含まれる 2 頂点 (マークされた 2 頂点) を結び, かつ, その H の他のすべての頂点をちょうど 1 回ずつ通過する道が存在しなければならない. しかし, 前述のように, H はそのような道を持たない. したがって, 矛盾であり, G はハミルトン閉路を持たない.

以上の考察により, G は 2-タフで, かつ, ハミルトン閉路を持たないことがわかった. さらに, 一般の l に対して, このグラフのタフネスは $\frac{9l+4}{4l+3}$ だから, $l \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{9l+4}{4l+3} \rightarrow \frac{9}{4}$ となり, $l \geq 2$ を大きく取ることによって, ハミルトン閉路を持たないまま, タフネスを漸近的に $\frac{9}{4}$ にいくらでも近くすることができる. ■

この反例によって, どのくらいタフネスを上げればハミルトン閉路の存在が保証されるのかという目安を失ったばかりか, さらに, ハミルトン閉路を持たないグラフで, 無限に高いタフネスを持つグラフを構成しようとする研究者さえ現れるようになった. タフネスとハミルトン閉路の存在性の関係は未解決である.

一般には, ハミルトン閉路を持つための必要十分条件は難しく, 次の定理が最も有名な十分条件である.

定理 3.9 (オア) 頂点数 $n \geq 3$ のグラフ G が, 任意の非隣接 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

ならば, G はハミルトン閉路を持つ.

証明. 背理法を用いる. 定理の条件を満たすがハミルトン閉路を持たない辺数が極大なグラフを G とする. G の極大性から, 非隣接 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して, $G \cup \{uv\}$ はハミルトン閉路を持つので, G は u と v を結ぶハミルトン道 $x_1x_2 \cdots x_n$ を持つ (ただし $u = x_1$, $v = x_n$ であるとする). ここで,

$$S = \{x_i : x_{i-1} \in N(v)\}$$

とおくと, $N(u) \cup S \subset V(G) - \{u\}$ である. 一方, 定理の条件から

$$\deg(u) + \deg(v) = |N(u)| + |S| \geq n$$

だから, $N(u)$ と S の元には重複がある. それを $x_k \in N(u) \cap S$ とおくと,

$$x_1x_kx_{k+1} \cdots x_nx_{k-1}x_{k-2} \cdots x_2$$

が G のハミルトン閉路である. これは G の選び方に矛盾する. ■

この定理はハミルトン閉路を持つための非隣接2頂点の次数和に関して、最良の評価を与えていることを示そう: 完全2部グラフ $K_{m,m+1}$ を考える. これは, 命題 3.5 により, ハミルトン閉路を持たない. $K_{m,m+1}$ の非隣接2頂点は同じ部集合に属するので, 非隣接2頂点の次数和の最小値は $2m$ である. したがって, $K_{m,m+1}$ は任意の非隣接2頂点 u, v に対して,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq 2m = |V(K_{m,m+1})| - 1$$

であるが, ハミルトン閉路を持たない.

次の定理はオアの定理 3.9 から直ちに得られる.

定理 3.10 (ディラク) 頂点数 $n \geq 3$ のグラフ G が, 最小次数 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ ならば, G はハミルトン閉路を持つ.

証明. G の任意の頂点 v に対して, $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ であるから, G の任意の非隣接2頂点 u, v に対して, $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ である. したがって, 定理 3.9 より, G はハミルトン閉路を持つ. ■

同様に, $K_{m,m+1}$ を考えれば, 最小次数がちょうど $n-1$ であるハミルトン閉路を持たないグラフになっていることがわかる. したがって, 定理 3.10 の最小次数の条件も最良であることがわかる.

第4章 マッチング

4.1 2部グラフのマッチング

図4.1の左は少々変形した17畳の部屋 R を表している(1マスは半畳である). この部屋に17枚の畳を互いに重なり合うことなく, 敷き詰められるだろうか. 図4.1の右はこの部屋の半畳に頂点を対応させ, 隣接する半畳に対応する2頂点を辺で結んで得られた34頂点からなるグラフ G_R である. 部屋 R に畳が敷き詰められるということは, G_R に互いに端点を共有しない17本の辺集合が取れることと同値である. G_R は2部グラフであり, 各辺は白と黒の頂点を結んでいるので, そのような辺集合が選べるためには, 白頂点と黒頂点の個数が等しくなければならない. しかしながら, G_R においてはそうでないので, G_R にはそのようなまい辺集合を取ることはできないし, 部屋 R に畳を敷き詰めることはできないことがわかる.

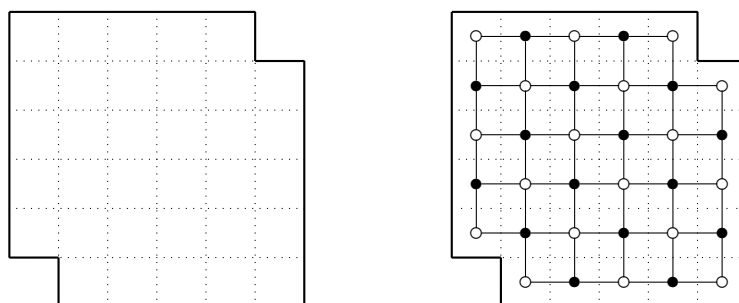


図 4.1: 部屋 R と対応するグラフ G_R

グラフ G の辺 e, e' が**独立である**とは, e と e' が端点を共有しないことである. 独立辺集合 $M \subset E(G)$ を**マッチング**という. 辺 $uv \in M$ のとき, 頂点 u, v は M に**マッチ**されている, または, M に**被覆**されているという. $|M|$ が最大るとき, M は**最大マッチング**という. M がすべての頂点を被覆するとき (すなわち, すべての頂点に M に含まれた辺が接続するとき), M を**完全マッチング**という. 明らかに, マッチング M が完全ならば最大である. しかしながら, その逆は成り立たない. 例えば, グラフ G の頂点数が奇数の場合, その最大マッチングは G の完全マッチングにはならない.

上の問題は, 与えられたグラフが完全マッチングを持つかどうかについての問題であり, その解決に以下の事実を用いた.

命題 4.1 2部グラフ $G = (X, Y)$ が完全マッチングを持つならば, $|X| = |Y|$ である. ■

一般に、命題 4.1 の逆は成り立たない。

問題 4.2 図 4.2 のグラフ G は完全マッチングを持つか。

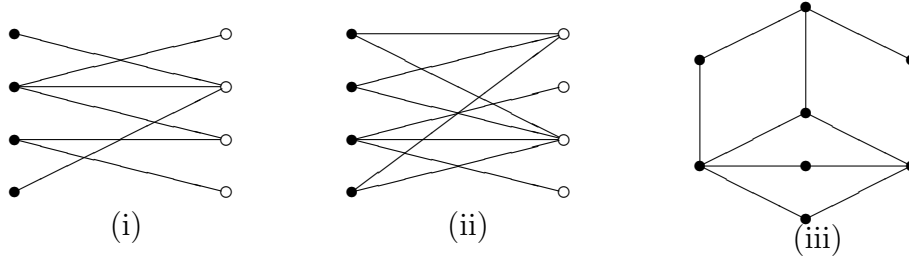


図 4.2: 完全マッチングを持つか

問題 4.2 の解答. (i), (ii) において、ある k 個の黒頂点が $k - 1$ 個以下の白頂点としかペアになれない構造が発見できるはずである。そのような構造があれば、すべての黒頂点を白頂点とペアリングするのは無理である。

(iii) のグラフは、定理 1.25 より、2 部グラフとなる。命題 4.1 を満たしているか。■

問題 4.2 の (i), (ii) では、いくつかの黒頂点が少ない白頂点を取り合うという構造によって、完全マッチングを持たないことを結論できた。次の定理は、2 部グラフの中の完全マッチングの存在には、そのような構造の有無が本質的であることを主張している。

定理 4.3 $G = (X, Y)$ を 2 部グラフとし、 $X, Y \subset V(G)$ をその部集合とする。グラフ G が X を被覆するマッチングを持つための必要十分条件は、任意の $S \subset X$ に対して、

$$|S| \leq |N_G(S)|$$

が成り立つことである。ただし、 $N_G(S) = \bigcup_{s \in S} N_G(s)$ である。

証明の前に、少々準備を行う。 G をグラフとし、 $M \subset E(G)$ をマッチングとする。 G の道 $P = e_1 e_2 \cdots e_n$ (ただし $e_i \in E(G)$) において、 M に含まれている辺と含まれていない辺が交互に繰り返すとき、 P は M の**交互道**という。交互道 $P = e_1 \cdots e_n$ の端点が M に被覆されていない場合、

$$M' = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

は G のマッチングになっており、 $|M'| > |M|$ である。この操作をマッチングの**交互道による拡大**という。

定理 4.3 の証明. X の点をすべて被覆するマッチングがあれば、任意の $S \subset X$ に対して、

$$|N_G(S)| \geq |\{y \in Y : \text{ある } s \in S \text{ に対して, } sy \in M\}| = |S|$$

である。したがって、必要性は明らかである。

十分性を示すために、 G の最大マッチング M が点 $u \in X$ を被覆しなかったとする。このとき、

$$S = \{x \in X : u \text{ と } x \text{ を結ぶ } M \text{ の交互道が存在する}\}$$

とおく。特に、 u に対しても、 u から長さ 0 の交互道があると思えるので、 $u \in S$ とする。ここで、 $S = \{u, s_1, \dots, s_k\}$ とおく。このとき、各 s_i は M の辺に被覆されているので、各 s_i は $y_i \in Y$ とマッチされているとする。今、ある $s \in S$ から M にマッチされていないある $y \in Y - \{y_1, \dots, y_k\}$ に対して、 $sy \in E(G) - M$ が存在すれば、 u と y を結ぶ M に関する交互道で、 u も y も M に被覆されていないものを取りことができ、 M を拡大することができる。そして、 M の最大性に反する。

ゆえに、そのような sy を取ることはできない。だから、 $N_G(S) = \{y_1, \dots, y_k\}$ であり、

$$k + 1 = |S| > |N_G(S)| = k$$

であり、定理の条件に反する。■

系 4.4 (結婚定理) $G = (X, Y)$ を $|X| = |Y|$ なる 2 部グラフとする。グラフ G が完全マッチングを持つための必要十分条件は、任意の $S \subset X$ に対して、

$$|S| \leq |N_G(S)|$$

が成り立つことである。

証明. 定理 4.3 において、 $|X| = |Y|$ とせよ。■

何人かの生徒がいくつものクラブ活動に重複して所属している状況を考えよう。その中で、各クラブから兼任することなく代表を選出したい。それが可能であるかどうかの条件が定理 4.3 より得られる。

すべての生徒の集合を Y とする。クラブの数がちょうど k 個あり、各クラブに属している生徒の集合を $A_i \subset Y$ とする ($i = 1, \dots, k$)。ここでの目標は、集合族¹ $\{A_1, \dots, A_k\}$ に対して、 $a_i \in A_i$ なる大きさ k の集合 $\{a_1, \dots, a_k\}$ を選ぶことに他ならない。このような $\{a_1, \dots, a_k\}$ を集合族 $\{A_1, \dots, A_k\}$ の**個別代表系**と呼ぶ。

グラフを用いる準備を行う。 $X = \{A_1, \dots, A_k\}$ とする。そして、生徒 $a \in Y$ がクラブ $A_i \in X$ に属しているとき、 a と A_i を辺で結び、 X と Y を部集合とする 2 部グラフ $B(X, Y) = G$ を構成する。このとき、 X から個別代表系を選ぶことは、 G において、 X の頂点をすべて被覆するマッチングを見つけることに他ならない。したがって、次の系が得られる。

系 4.5 集合族 $\{A_1, \dots, A_k\}$ が個別代表系を持つための必要十分条件は、 A_1, \dots, A_k の任意の l 個の和集合が l 個以上の要素を含むことである。

¹ **集合族**とは、集合を要素とする集合を意味する。

少々発展的な話題について考えてみる. 定理 4.3 が各男性に 1 人の女性を対応させられる条件を与えたのに対して, 一夫多妻性の国ならどうだろうか (女性差別というなら, 男女を逆にすればよい). 次の定理は, 男性の集合 X の各男性が自分の欲しい奥さんの数を指定するとき (すなわち, 関数 $f: X \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ が指定されている), 各男性が欲しい奥さんの数だけ奥さんをもらうことができる条件を与えている.

定理 4.6 $G = (X, Y)$ を 2 部グラフとし, $f: X \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ を固定された関数とする. このとき, G の部分グラフ H で, 条件

(i) $V(H) \supset X$,

(ii) 任意の $x \in X$ に対して, $\deg_H(x) = f(x)$,

(iii) 任意の $y \in Y$ に対して, $y \in V(H)$ ならば, $\deg_H(y) = 1$,

を満たすものが存在するための必要十分条件は, 任意の $S \subset X$ に対して,

$$\sum_{x \in S} f(x) \leq |N_G(S)|$$

が成り立つことである.

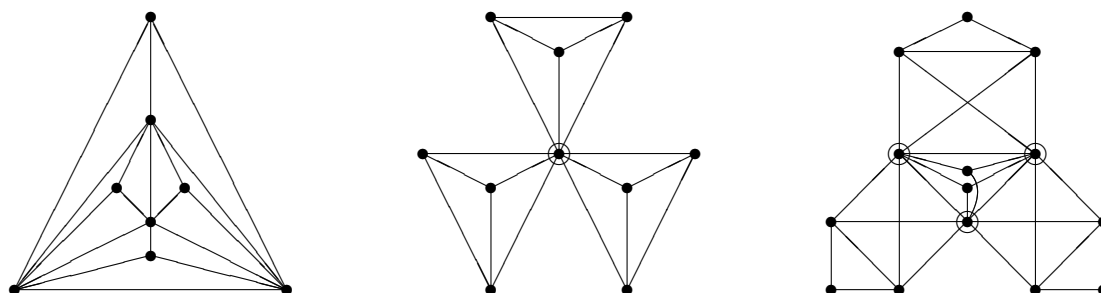
任意の $x \in X$ に対して, $f(x) = 1$ なる関数 f を考えれば,

$$\sum_{x \in S} f(x) = \sum_{x \in S} 1 = |S|$$

であり, 定理 4.6 は定理 4.3 そのものである. 証明方針も定理 4.3 と全く同様に行うことができる.

4.2 一般のグラフのマッチング

次のグラフが完全マッチングを持つかどうか考えよ. 完全マッチングを持つことを示す場合は, 1 つの完全マッチングを図示すればよいが, 完全マッチングを持たないことを証明する場合は, どんなにがんばっても完全マッチングを発見できないことを証明しなければならない. 2 番目と 3 番目のグラフについては, 試行錯誤の果てに完全マッチングがなさそうな気がするだろう. それを証明するには, マークされている頂点に着目するとよい.



頂点数が奇数(偶数)の連結成分を**奇成分(偶成分)**という。マークされた頂点を取り除くと、奇成分が取り除いた頂点数より多いことがわかるだろう。実際、完全マッチングを持つグラフは次のように特徴付けられている。

定理 4.7 (タット) グラフ G が完全マッチングを持つための必要十分条件は、任意の $S \subset V(G)$ に対して、 $o(G-S) \leq |S|$ を満たすことである。ただし、 $o(G-S)$ はグラフ $G-S$ の奇成分の個数を表す。

証明に入る前に、必要性と十分性とどちらが明らかか考えてみよう。

証明. G が完全マッチング M を持つとする。任意の $S \subset V(G)$ に対して、グラフ $G-S$ を考える。 $G-S$ の各奇成分 H のある 1 点と S の点を結ぶ辺が M に含まれているので、 $o(G-S) \leq |S|$ が成り立つ。

次に、十分性について考える。 $|V(G)| = n$ とする。 $S = \emptyset$ を考えれば、 $o(G-\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ であり、 G は偶成分からなることがわかり、 G の頂点数も偶数である。また、 n は偶数なので、任意の $S \subset V(G)$ に対して、 $|S|$ と $o(G-S)$ の偶奇性は等しいことがわかる。

正の偶整数 n についての帰納法を用いる。 $n = 2$ のとき、 $G = K_2$ となり、明らかに定理は成り立つ。よって、 $n \geq 4$ を仮定し、頂点数が n 未満のグラフが条件を満たせば、そのグラフは完全マッチングを持つことを仮定する。次の 2 つの場合を考える。

(i) すべての $S \subset V(G)$ に対して、 $o(G-S) < |S|$ が成り立つ場合。 $o(G-S)$ と $|S|$ の偶奇性は等しいので、 $o(G-S) \leq |S| - 2$ である。辺 $uv \in E(G)$ に対して、グラフ $G - \{u, v\}$ を考え、任意の $T \subset V(G - \{u, v\})$ を $G - \{u, v\}$ から取り除く。このとき、 $o(G - \{u, v\} - T) \leq |T|$ ならば、帰納法の仮定により、 $G - \{u, v\}$ は完全マッチングを持ち、それに辺 uv を加えれば、 G の完全マッチングを構成することができる。したがって、ある T に対して、 $o(G - \{u, v\} - T) > |T|$ と仮定する。このとき、

$$o(G - \{u, v\} - T) > |T| = |T \cup \{u, v\}| - 2$$

であり、 $o(G - (T \cup \{u, v\})) \geq |T \cup \{u, v\}|$ が得られる。これは (i) の仮定に反する。

(ii) ある $S \subset V(G)$ に対して、 $o(G-S) = |S|$ が成り立つ場合。 $|S|$ が最大になるような S をとり、 $|S| = k$ とする。 G_1, G_2, \dots, G_k を $G-S$ の奇成分とする。このとき、それらが $G-S$ の成分すべてである。なぜなら、 $G-S$ の偶成分 G_0 が存在すれば、 $u_0 \in V(G_0)$ に対して、 $o(G - (S - \{u_0\})) = k + 1 = |S \cup \{u_0\}|$ となる。したがって、 S の最大性に反する。

$i = 1, 2, \dots, k$ に対して、 $S_i \subset S$ を G_i の頂点に隣接している S の頂点集合とする。各 S_i は空でない(なぜなら、 G_i が G の奇成分になり、 $o(G-\emptyset) > |\emptyset| = 0$ となり、定理の条件に反する)。任意の $j (1 \leq j \leq k)$ に対して、 S_1, \dots, S_k のうちのどの j 個の和集合の大きさも j 以上になる(そうでなければ、 j 個の集合 T に対して、 $o(G-T) > |T|$ となるからである)。系 4.5 により、 S は頂点 v_1, \dots, v_k を持ち、各 v_i は G_i のある頂点 u_i と結ばれているとしてよい。

各 $G'_i = G_i - \{u_i\}$ の頂点数は偶数だから、任意の $W \subset V(G'_i)$ に対して、 $o(G'_i - W) \leq |W|$ を満たせば、帰納法の仮定により、 G'_i は完全マッチング M'_i を持つ。したがって、

$$M = \bigcup_{i=1}^k (M'_i \cup \{v_i u_i\})$$

が G の完全マッチングとなる。したがって、 G'_i はある $W \subset V(G'_i)$ に対して、 $o(G'_i - W) > |W|$ となったとする。 $o(G'_i - W)$ と $|W|$ は同じ偶奇性を持つので、 $o(G'_i - W) \geq |W| + 2$ である。したがって、

$$\begin{aligned} o(G - (S \cup W \cup \{u_i\})) &= o(G'_i - W) + o(G - S) - 1 \\ &\geq |S| + |W| + 1 \\ &= |S \cup W \cup \{u_i\}|. \end{aligned}$$

しかしながら、 S の最大性に反する。ゆえに、定理が成り立つ。 ■

定理 4.7 から、次の系を導くことができる。

系 4.8 切断辺を持たない 3-正則グラフは完全マッチングを持つ。

証明. G を 3-正則グラフとし、 $S \subset V(G)$ を任意に取る。奇点定理により、 $G - S$ の各奇成分 H から S に向かって奇数本の辺が出ている。その本数が 1 本なら、 G が切断辺を持つことになり、矛盾であるから、 H から S に 3 本以上の辺が出ていることになる。 S と $G - S$ を結ぶ辺数を k とおくと、 $k \geq 3o(G - S)$ である。一方、任意の頂点 v に対して、 $\deg(v) = 3$ より、 $k \leq 3|S|$ である。よって、 $o(G - S) \leq |S|$ であり、定理 4.7 により、 G は完全マッチングを持つ。 ■

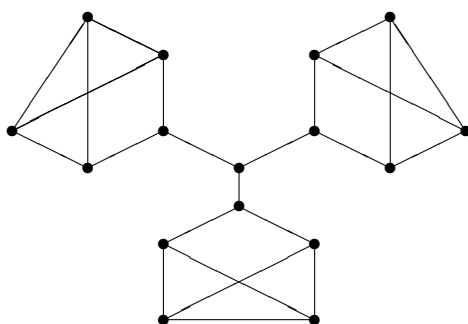


図 4.3: 完全マッチングを持たない 3-正則グラフ

第5章 平面グラフ

5.1 オイラーの公式

平面的グラフ(すなわち, 平面に辺の交差なく描けるグラフ)の頂点数と辺数との関係にはある制約がある. さらに, 平面的グラフの固定された平面埋め込み, すなわち, 平面グラフにおいては, 次のような頂点数, 辺数, 面数の関係が成り立つ. (平面的グラフにおいては, どのような平面への埋め込みに対しても, 面の数は不変であることもわかる.)

定理 5.1 (オイラーの公式) 連結な平面グラフ G について, 次の式が成り立つ:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

証明. 頂点数 n のグラフの辺数に関する帰納法による. 連結な平面グラフ G において, G の辺数が最小のとき, G は木であり, 命題 1.3(iii) より, その辺数は $n-1$ である. 木が平面に埋め込まれているときの面数は 1 であるから, $n - (n-1) + 1 = 2$ であり, 定理の主張は成り立つ.

$|E(G)| \geq n$ のとき, G の中に全域木 T を固定し, $e \in E(G) - E(T)$ とする. $G' = G - \{e\}$ とおくと, G' は連結であるから, 帰納法の仮定により,

$$n - (|E(G')| + |F(G')|) = 2$$

が成り立つ. ここで, G' に辺 e を加えて G を復元する. このとき, e の辺に沿った両側が同一の面に属すれば, G' において, e の両端点は異なる連結成分に含まれることになり, G' が連結であることに反する. したがって, G において e の辺に沿った両側が異なる面に属することになり, $|F(G)| = |F(G')| + 1$ である. ゆえに,

$$n - |E(G)| + |F(G)| = n - (|E(G')| + 1) + (|F(G')| + 1) = 2$$

が成り立ち, 命題の証明が完結する. ■

命題 5.2 任意の平面グラフ G に対して, 次が成り立つ:

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

等号は G が極大平面グラフのときに成り立つ.

証明. G の任意の面の境界閉歩道の長さは 3 以上であるから,

$$3|F(G)| \leq 2|E(G)|$$

である (等号は G が極大平面グラフであるときに成り立つ). これをオイラーの公式に代入し, $|F(G)|$ を消去すれば, 求める式を得る. ■

命題 5.3 任意の平面グラフは次数 5 以下の点を少なくとも 4 個持つ.

証明. 命題 1.6 により, G に対角線を追加することによって, G を極大平面グラフ \tilde{G} に変形できる.

V_i を \tilde{G} の次数 i の頂点数であるとすると, すべての次数は 3 以上だから, 握手補題により,

$$\sum_{i=3,4,5,\dots} V_i = |V(\tilde{G})|; \quad \sum_{i=3,4,5,\dots} iV_i = 2|E(\tilde{G})|.$$

一方, 定理 5.1 により,

$$|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F(\tilde{G})| = 2.$$

\tilde{G} のすべての面は三角形だから, $2|E(\tilde{G})| = 3|F(\tilde{G})|$ であり,

$$2|E(\tilde{G})| = 6|V(\tilde{G})| - 12$$

が成り立つ¹. さらに,

$$\sum_{i=3,4,5,\dots} iV_i = 6 \sum_{i=3,4,5,\dots} V_i - 12.$$

ゆえに,

$$\sum_{i=3,4,5,\dots} (6-i)V_i = 12.$$

$$3V_3 + 2V_4 + V_5 = 12 + \sum_{i=7,8,\dots} (i-6)V_i \geq 12$$

$$3(V_3 + V_4 + V_5) \geq 3V_3 + 2V_4 + V_5 \geq 12$$

したがって, $V_3 + V_4 + V_5 \geq 4$ である.

問題 2.2 より, 任意の頂点 $v \in V(G)$ に関して, $\deg_{\tilde{G}}(v) \geq \deg_G(v)$ であるから, G の次数 5 以下の頂点数も 4 個以上である. ■

任意のグラフ G において, $\kappa(G) \leq \delta(G)$ であるから, 次の系が成り立つ. ただし, $\kappa(G)$ は G の連結度であり (第 3 章参照), $\delta(G)$ は最小次数を表す.

¹ 次数 5 以下の頂点の存在のみなら, 極大平面グラフを考えることなく, 次のように証明できる: 命題 5.2 より,

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12.$$

G の頂点の平均次数 \bar{d} は

$$\bar{d} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)}{|V(G)|} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq 6 - \frac{12}{|V(G)|} < 6$$

であり, 次数 5 以下の頂点が存在する. ■

系 5.4 任意の平面グラフ G の連結度 $\kappa(G)$ は 5 以下である。

命題 5.5 三角形を含まない任意の平面グラフ G は、 $E(G) \leq 2|V(G)| - 4$ を満たし、次数 3 以下の頂点を必ず持つことを証明せよ。

証明. G は三角形を含まないので、 $2|E(G)| \geq 4|F(G)|$ である。これをオイラーの公式に代入して、 $|F(G)|$ を消去すると、求める式を得る。また、 G の平均次数 \bar{d} は

$$\bar{d} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = 4 - \frac{8}{|V(G)|} < 4$$

である。ゆえに、 G は次数 3 以下の頂点を持つ。■

命題 5.6 K_5 と $K_{3,3}$ のどちらも平面的ではない。

証明. K_5 の頂点数と辺数はそれぞれ 5 と 10 である。これは、命題 5.2 に反する。 $K_{3,3}$ の頂点数と辺数はそれぞれ 6 と 9 である。 $K_{3,3}$ は三角形を持たないことに注意すると、これは、命題 5.5 に反する。■

グラフ G と H に対して、 G が H の辺上に次数 2 の点をいくつか付け加えて得られるとき、 G は H の**細分**であるという。

平面グラフの特徴付けとして、次の定理が知られている。

定理 5.7 (クラトウスキー) グラフ G は平面的であるための必要十分条件は、 G が K_5 と $K_{3,3}$ のどちらの細分も含まないことである。

必要性は、命題 5.6 より、明らかである。十分性に関しては、証明は長く、煩雑であるので、省略する。

5.2 正多面体

正多面体とは、各面が正多角形であり、各頂点に同数の面が集まっている凸多面体である。凸多面体は球面上のグラフと見ることができる。また、球面上のグラフは、任意に選んだ面を外領域とするような平面グラフと見ることができる。逆に、平面グラフ G の外領域を切り取り、 G の有限面からなる 2-胞体に、外領域に対応する 2-胞体を裏側から貼り付け、多少ふくらみを持たせたものは、球面上のグラフと見なすことができる。ただし、2-胞体とは、 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ に位相同型²な空間である。

次の事実は簡単なオイラーの公式の計算から得られる。正多面体に対応するグラフ G について、 G も正則であるし、 G^* も正則である。

定理 5.8 正多面体は表 5.1 の 5 種類しか存在しない。

² 位相空間 X と Y が**位相同型**であるとは、連続であり、逆像もまた連続な写像 $\phi : X \rightarrow Y$ が存在することである。そのような写像 ϕ を**同相写像**という。

証明. 正多面体の定義から, G は各面が p 角形である q -正則平面グラフであるとする. G に 2 角形や次数 2 の頂点があれば, P を平らな面により構成できないので, $p, q \geq 3$ である.

G に対して, オイラーの公式が成り立つ:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

$q|V(G)| = p|F(G)| = 2|E(G)|$ を代入して整理すると,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{|E(G)|} \dots\dots (*)$$

が得られる. (*) は p と q に関して対称なので, $p \geq q$ としてよい. $q \geq 4$ ならば, (*) の左辺が正でなくなるので, $q = 3$ である. したがって,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{|E(G)|}$$

となり, これを満たす p は $p = 3, 4, 5$ である. このとき, それぞれ $|E(G)| = 6, 12, 30$ である. そのそれぞれについて, 対応する正多面体が実際に構成できる. (表 5.1, 図 5.1 参照.) ■

表 5.1: 正多面体

| p | q | $ E(G) $ | 多面体 |
|-----|-----|----------|-------|
| 3 | 3 | 6 | 正四面体 |
| 3 | 4 | 12 | 正八面体 |
| 4 | 3 | 12 | 正六面体 |
| 3 | 5 | 30 | 正二十面体 |
| 5 | 3 | 30 | 正十二面体 |

正四面体グラフと正八面体グラフは双対グラフの関係にあり, 正十二面体グラフと正二十面体グラフも同様の関係になっていることがわかる.

定理 5.9 平面グラフ G の全域木からなる集合 $T(G)$ と G^* の全域木からなる集合 $T'(G)$ との間には全単射が存在する. (すなわち, $|T(G)| = |T'(G)|$ である.)

証明. G の全域木 T を固定し, G^* の全域部分グラフ T^* を次のように定める:

$$E(T^*) = \{e^* : e \notin E(T)\}.$$

ただし, $e \in E(T)$ に対する $e^* \in E(G^*)$ の定義については, 双対グラフの定義を参照せよ (命題 1.9). このとき, T^* が連結で, 閉路を含まないことを証明すればよい.

T は木なので, T に対応する面は 1 つである. したがって, G の任意の 2 つの面 $F, F' \in F(G)$ は, T の辺を横切ることなく, G の面をたどって到達可能である. ゆえに, T^* は連結

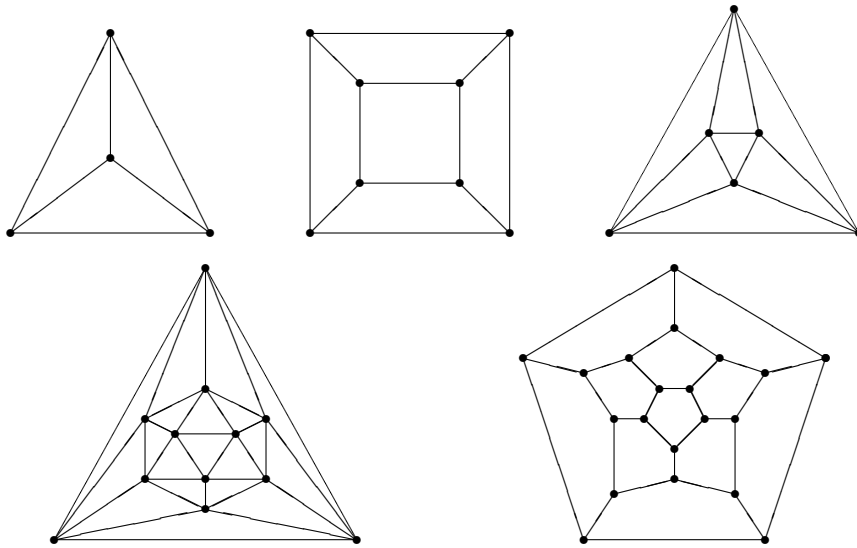


図 5.1: 正多面体グラフ

である. T^* が閉路 C^* を持つなら, T^* において C^* の内側の面の F^* と外側の面 F'^* が存在する. F^* と F'^* は C^* を横切ることなく, G^* の面をたどって到達不可能である. このことは T が非連結であることを意味する. よって, $T^* \subset G^*$ は全域木である.

さらに, G^* の双対グラフは G 自身であり, 上の定義から $(T^*)^* = T$ であることがわかる. ■

さて, 立方体の異なる展開図の総数を求めてみよう. ただし, 回転や裏返しで重なり合う展開図は同じと見なすこととする. (この手の問題を唐突に発問すると, どうやったらよいかわからないという学生が多数現れる.) 何かある観点を設定して, 注意深く列挙するという態度が重要である. その観点として, 展開図中の一直線に並ぶ正方形の個数に着目しよう. (何か別の観点は設定できるのか?) 立方体の展開図 T の一直線に並んだ正方形の最大個数を $\ell(T)$ と表す. 明らかに, 任意の T に対して, $2 \leq \ell(T) \leq 4$ である.

命題 5.10 図 5.2 のように, 立方体の展開図は 11 個存在する.

図 5.2 の展開図 T について, $\ell(T) = 4$ なるものが 6 個, $\ell(T) = 3$ なるものが 3 個, $\ell(T) = 2$ なるものが 1 個である. また, 立方体の展開図 T を固定すると, 立方体グラフの双対グラフの全域木, すなわち, 正八面体グラフの全域木がちょうど 1 つ決まることがわかる (図 5.3 参照). ここで, 正八面体グラフ上で互いに重なり合う³ 全域木は, 立方体の同一の展開図に対応していることに注意せよ. また, 正八面体グラフの全域木を 1 つ固定すると, それに対応する立方体の展開図が 1 つ決まる.

したがって, 上の考察により, 次の命題が成り立つ:

³ 正八面体グラフ H の全域木の $T, T' \subset H$ が **重なり合う** とは, T と T' の同型写像 $\sigma: T \rightarrow T'$ で, H の自己同型写像に拡張できるものが存在することである.

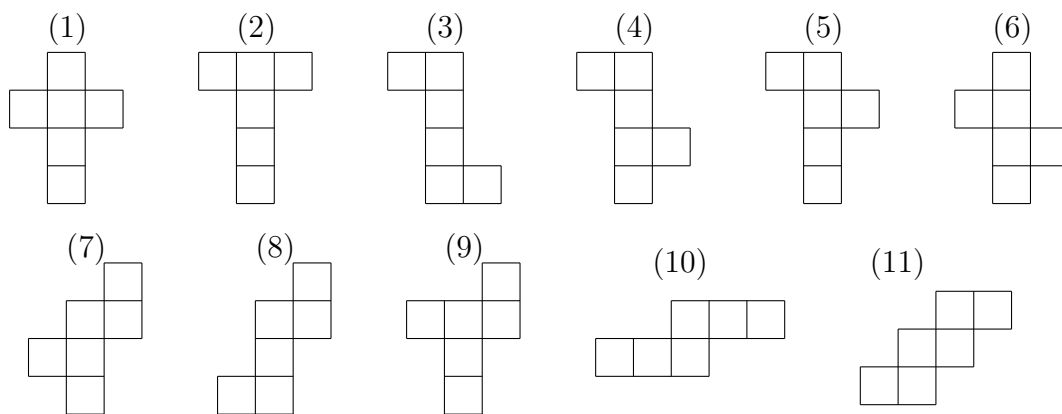


図 5.2: 立方体のすべての展開図

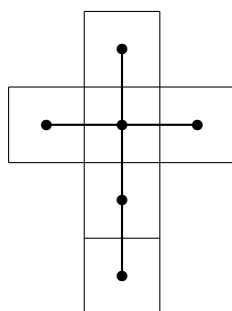


図 5.3: 立方体の展開図と正八面体グラフの全域木

命題 5.11 立方体の展開図の総数は正八面体グラフの互いに重なり合わない全域木の総数に等しい. ■

ここで, 定理 5.9 を用いると, 立方体グラフと正八面体グラフは互いに双対グラフの関係にあるので, 全域木の総数は等しい. そして, 正八面体グラフの全域木 T, T' が互いに重なり合えば, 定理 5.9 で対応させた立方体グラフの全域木 T^*, T'^* も立方体グラフの中で互いに重なり合うので, 次の命題が得られる:

命題 5.12 正八面体グラフの互いに重ならない全域木の総数は, 立方体グラフの互いに重ならない全域木の総数に等しい.

系 5.13 立方体の展開図の総数と正八面体の展開図の総数は一致する. また, 正二十面体と正十二面体は同数の展開図を持つ.

証明. 正六面体 Q , すなわち立方体, を展開することは, Q に対応するグラフの双対グラフ G^* の全域木を選ぶことである. したがって, 定理 5.9 により, 互いに双対グラフの関係にある凸多面体の展開図の総数は等しい. ■

第3章で触れたハミルトン閉路の話題を思い出そう. グラフのハミルトン閉路の存在を保証する十分条件は, 自明なものを除くと, なかなか巧妙で難しいものが多かった. 第3章で紹介したオアの定理 3.9 やディラクの定理 3.10 は, グラフの辺数が多ければ, ハミルトン閉路が存在すると主張している. しかしながら, 平面グラフは辺数が少ないにもかかわらず (命題 5.2 参照), ハミルトン閉路の存在のためのある十分条件を与えることができる.

定理 5.14 (タット) すべての 4-連結平面グラフはハミルトン閉路を持つ. ■

定理 5.14 の証明は難しいので省略する. 次に紹介する問題もそれほど自明ではないが, その問題の解答は巧妙でおもしろい.

問題 5.15 次数 2 の頂点を持たない木 T が, 平面に辺の交差がないように, かつ, 次数 1 の各頂点が外に向かって無限遠まで放射状に延ばされて, 平面に配置されているとする. このとき, 次数 1 以外のすべての頂点を囲む円 C に対して, C と T の交点に頂点を置き, C の外側に延びた辺を切り取ったグラフ G を考える (図 5.4 参照. G は 2-連結平面グラフであり, 無限面を囲む閉路 C を取り除くと, 次数 2 の頂点を持たない木になる). このとき, G はハミルトン閉路を持つことを証明せよ.

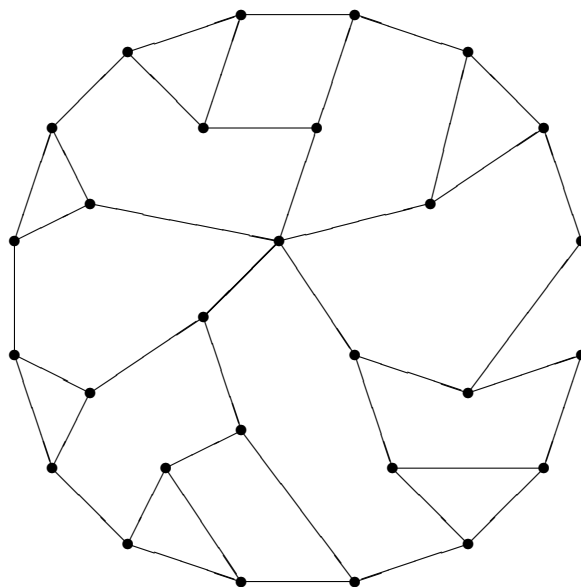


図 5.4: T と C により構成されたグラフ G

解答. C 上の頂点を順に v_1, v_2, \dots, v_n とおき, n に関する帰納法を用いる. T は次数 2 の頂点を持たないので, $n \geq 3$ である. $n = 3$ のとき, $G = K_4$ であり, G は明かにハミルトン閉路を持つ. したがって, $n \geq 4$ とする.

G の構成法から, $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \dots = \deg(v_n) = 3$ である. グラフ $T' = G - V(C)$ は木であるから, T' は次数 1 以下の頂点 x を持つ. $\deg_G(x) \geq 3$ であるから $(\deg_{T'}(x) = 0$

のとき, $\deg_G(x) \geq 4$ である), x から C に向かって2本以上の辺が出ている. x に接続する互いに隣り合う辺と C は G の三角形の面を構成している. それを v_1v_2x とおく. 三角形 v_1v_2x を1点に縮約して得られるグラフ G' を考える. それによって多重辺が生じれば, 1本の辺に置き換えるものとする. G' において, 三角形 v_1v_2x が縮約されてできた頂点を x' とおく.

G' は帰納法の条件を満たすので, 帰納法の仮定より, G' はハミルトン閉路 C' を持つ. C' が x' を通過する方法は, グラフの対称性を考えると, 本質的に2通りある.

(i) C' が x' に接続する外領域の境界に含まれる2つの辺を通過する場合. G のハミルトン閉路 C を v_1, x, v_2 という順で通過させ, それ以外の頂点は C' が通った順に通過させる.

(ii) そうでない場合, すなわち, C' 上で x' に接続する辺の1本が外領域の境界上にない場合. G のハミルトン閉路 C を x, v_1, v_2 (または, x, v_2, v_1) という順で通過させ, それ以外の頂点は C' が通った順に通過させる.

上の2通りの場合分けにより, G' の中で C' がどのような順で頂点を通過しようとも, それに応じて, G の中のハミルトン閉路 C の通り方を指定できる. ■

問題 5.16 立方体グラフ Q_n (問題 1.27 参照) はハミルトン閉路を持つことを証明せよ.

5.3 曲面上のグラフ

前節で, 球面上のグラフと平面グラフは同一に扱えることを述べた. この節では, 球面以外の曲面上のグラフについて考える.

種数 g の曲面 M_g とは, 球面に g 個のハンドルを貼り付けたものである. それを連続的に変形すると, 種数 g の曲面 M_g は g 個の浮き輪が並んだ形をしている (図 5.5 参照). 特に, M_0 は球面である. S_1 をトーラスといい, S_2 をダブルトーラスという.

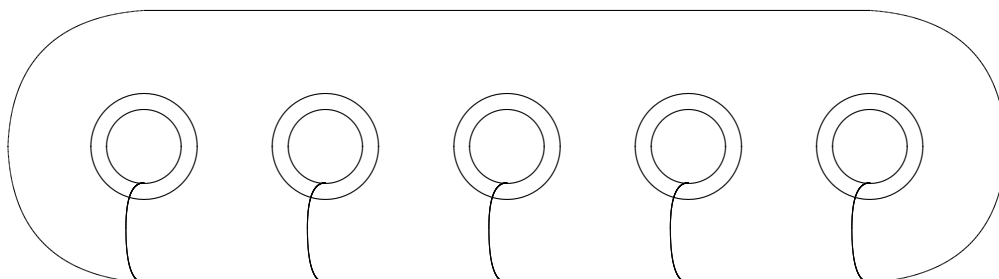


図 5.5: 種数 g の曲面

曲面の分類定理によると, 任意の曲面は, 球面に g 個のハンドルを貼り付けたものか, 球面に k 個のメビウスの帯を貼り付けたもののいずれかである. 前者を種数 g の**向き付け可能な曲面**といい, 後者を種数 k の**向き付け不可能な曲面**という. ここでは, 直感的理解を優先したいので, 球面以外の曲面として, 向き付け可能なもののみを扱うことにした.

種数 g の曲面 M_g 上のグラフ G が**2-胞体埋め込み**されているとは, G のすべての面が2-胞体を囲んでいることである. 言い換えれば, 各面の内部の任意の閉曲線が1点に潰せることである. M_g 上のグラフですべての面が三角形のものを**三角形分割**という.

定理 5.17 (曲面上のオイラーの公式) 種数 g の曲面上に2-胞体埋め込みされたグラフ G に対して, 次の式が成り立つ:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2g$$

特に, $g = 0$ の場合, グラフが連結であることと2-胞体埋め込みされていることが同値になるので, 定理 5.17 は定理 5.1 を含んでいる.

証明. 定理 5.1 により, $g = 0$ の場合は正しい. $g - 1$ 以下の場合はすべて正しいと仮定して, $g \geq 2$ の場合を g に関する帰納法で証明する.

G の全域木 T を取り, T を1頂点に縮約する. そして, 2-胞体を囲むループをすべて取り去る. 得られたグラフ G_T は1頂点からなる M_G 上のグラフである. もし, G_T が辺を持たなければ, G のすべての閉路が2-胞体を囲んでいたことになり, G は平面グラフになってしまい, G が M_g に2-胞体埋め込みされていることに矛盾である. したがって, G_T は辺 e を持つ. G において, e はある2頂点を結んおり, $T \cup \{e\}$ の G における閉路を C とする. 特に, C の長さを l とする.

(i) C が M_g を切断する場合. M_g を C により切断し, その切り口に円盤を貼ることにより, 曲面 $S_1 = M_{g-k}$ と $S_2 = M_k$ が得られたとする. V_i, E_i, F_i をそれぞれ S_i ($i = 1, 2$) 上のグラフの頂点数, 辺数, 面数とし, それぞれに帰納法の仮定を適用すると,

$$V_1 - E_1 + F_1 = 2 - 2(g - k); \quad V_2 - E_2 + F_2 = 2 - 2k$$

である. このとき, $V(G) = V_1 + V_2 - l$, $E(G) = E_1 + E_2 - l$, $F(G) = F_1 + F_2 - 2$ より,

$$V(G) - E(G) + F(G) = 2 - 2(g - k) + 2 - 2k + 2 = 2 - 2g.$$

(ii) C が M_g を切断しない場合. このとき, ハンドルが1つ切り開かれて, M_g は M_{g-1} に変形される. M_{g-1} 上のグラフを G' とすると, 帰納法の仮定により,

$$|V(G')| - |E(G')| + |F(G')| = 2 - 2(g - 1)$$

である. また, $|V(G')| = |V(G)| - l$, $|E(G')| = |E(G)| - l$, $|F(G')| = |F(G)| + 2$ より,

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2(g - 1) - 2 = 2 - 2g.$$

いずれの場合も、所望の式を得る. ■

さて、トーラスに三角形を1つ描いてみよう. これの頂点数, 辺数, 面数をそれぞれ V, E, F とすると,

$$V - E + F = 3 - 3 + 2 = 2 \neq 0$$

であり、定理5.17を満たさないことがわかる. それは、このグラフがトーラス上の2-胞体埋め込みでないからである. (三角形とその周辺は、トーラス上の平面部分に収まっているという事実に気づくはずである. ゆえに、平面のオイラーの公式を満たしてしまうのである.) 一般に、 M_g 上のグラフに対して (2-胞体埋め込みでないものも含めて),

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \geq 2 - 2g$$

が成り立つ.

命題 5.18 M_g に埋め込まれているグラフ G について、 $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3(2 - 2g)$ が成り立つ. (等号は G が M_g を三角形分割するときに成り立つ.)

証明. すべての面の境界閉歩道の長さは3以上なので、 $2|E(G)| \geq 3|F(G)|$ である. これを、 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \geq 2 - 2g$ に代入して、 $|F(G)|$ を消去すると、求める式が得られる. 括弧の中の記述は明らかである. ■

命題 5.19 K_n が M_g に埋め込めるなら、以下の式が成り立つ:

$$g \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

証明. 命題5.18の式に、 $|V(G)| = n$, $|E(G)| = \frac{1}{2}n(n-1)$ を代入せよ. ■

命題5.19について、リングエルが $g \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$ を満たす最小の g について、 K_n は M_g に埋め込むことができることを示した. (この問題は長い間未解決であった.) これにより、以下の命題が得られる.

グラフ G に対して、 G の種数 $\varepsilon(G)$ を次のように定義する:

$$\varepsilon(G) = \min\{g : G \text{ が } M_g \text{ に埋め込める}\}$$

命題 5.20 整数 $n \geq 4$ に対して、

$$\varepsilon(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

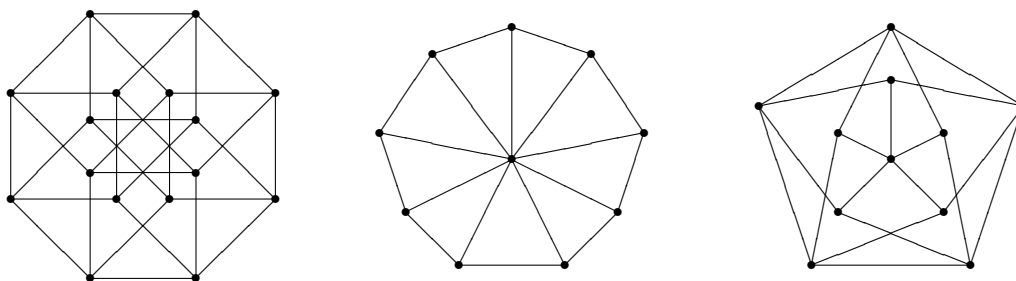
ただし、実数 r に対して、 $\lceil r \rceil$ で r の切り上げ、すなわち、 r 以上の最小の整数を表し、 $\lfloor r \rfloor$ で r の切り下げ、すなわち、 r 以下の最大の整数を表す.

第6章 彩色問題

6.1 抽象グラフの彩色

グラフ G の k -彩色とは, G のどの隣接2点も異なる色を持つような k 色による G の頂点の色付けを意味する. グラフ G が k -彩色可能であるとは, G が k -彩色を持つことである. G の染色数 $\chi(G)$ とは, G の彩色に必要な最小色数である.

問題 6.1 次のグラフの染色数を求めよ. (**注意.** 染色数は最小色数なので, $\chi(G) = k$ と答えるとき, G が k -彩色可能であり, かつ, $(k-1)$ -彩色可能でないことを証明しなければならない.)



命題 6.2 辺数 m のグラフ G に対して, 次の式が成り立つ:

$$\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}.$$

(G が完全グラフのとき, 等号が成り立つ.)

証明. G の染色数を k とおき, $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ を $V(G)$ の分割とする. ただし, 各 V_i は色 i で塗られた頂点集合である ($i = 1, \dots, k$). 任意の相異なる i, j に対して, ある $v_i \in V_i$ と $v_j \in V_j$ が存在して, $v_i v_j \in E(G)$ である. そうでなければ, $V_i \cup V_j$ を同色で塗ることができ, $\chi(G) = k$ であることに反する. したがって,

$$m \geq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

であり, これを k について解けば, 命題に与えた式が得られる. ■

命題 6.3 任意のグラフ G について, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ である. 完全グラフと長さ奇数の閉路が等号を満たす.

証明. グラフは単純であるとしてよい. 頂点数に関する帰納法を用いる. 頂点数が1のとき, 最大次数0であり, 命題は成り立つ. 今, “ $\Delta(G) \leq k$ ならば, $\chi(G) \leq k+1$ である”を証明する. グラフ G の任意の点 v を取り除き, $G' = G - v$ とおく. $\Delta(G') \leq \Delta(G) \leq k$ だから, 帰納法の仮定により, $\chi(G') \leq k+1$ である. また, $|N_G(v)| \leq k$ だから, たとえ $N_G(v)$ に k 色すべてが現れていても, v に残りの1色を使うことができる. したがって, $\chi(G) \leq k+1$ である. ■

定理 6.4 (ブルックス) グラフ G が完全グラフと奇閉路のいずれにも同型でなければ, $\chi(G) \leq \Delta(G)$ である. ■

証明. G は連結であるとしてよい. $\Delta(G) \leq 2$ のとき, G は道か閉路である. G が奇閉路ならば $\chi(G) = 3$ であり, そうでなければ $\chi(G) = 2$ であり, 定理は成り立つ.

そこで, $k \geq 3$ とし, $G \neq K_{k+1}$ に対して, $\Delta(G) \leq k$ ならば, $\chi(G) \leq k$ であることを G の頂点数に関する帰納法により示す.

(i) G が3-連結のとき. G は完全グラフでないので, 距離が2以上の頂点对が存在する. 特に, 頂点 $v \in V(G)$ とその非隣接な近傍 $x, y \in N_G(v)$ ($xy \notin E(G)$) がとれる. G は3-連結なので, グラフ $G' = G - \{x, y\}$ は連結である. G において, x, y に同一色1を塗り, グラフ $G' = G - \{x, y\}$ において, v に遠い頂点から順に着色する. 距離 $d_{G'}(u, v) = l \geq 1$ の頂点 $u \in V(G')$, すなわち $u (\neq v)$, を着色するとき, $\deg_{G'}(u) \leq k$ であり, u には距離 $l-1$ のまだ着色されていない頂点 u' が隣接しているから, k 色あれば u を塗ることができる. v については, $\deg_G(v) \leq k$ であり, その近傍 x, y には同色の色1が重複して塗られているので, k 色あれば v を塗ることができる.

(ii) G が3-連結でないとき. G は高々2頂点 p, q を共有する連結グラフ H, K に分けられる. $\deg_H(p), \deg_K(p) < \deg_G(p) \leq k$ であるから, H も K も K_{k+1} と同型でない. したがって, 帰納法の仮定より, H も K も k -彩色可能である. H と K が頂点 p のみを共有するとき, H と K は p が同じ色になるように塗ることができるので, G も k -彩色可能である.

したがって, H と K が2頂点 p, q を共有するとしてよい. H と K のおいて, $H' = H \cup \{pq\}$, $K' = K \cup \{pq\}$ とおく. (多重辺が出れば, それを1本の辺で置き換えよ.) このとき, $H' \neq K_{k+1}$, かつ, $K' \neq K_{k+1}$ ならば, 帰納法の仮定により, H と K の p と q が異なる色になるような k -彩色が得られるので, G 全体の k -彩色を構成することができる. したがって, $H' = K_{k+1}$ とする. このとき, $pq \notin E(G)$ であり, $\deg_H(p) = \deg_H(q) = k-1$ であることを考えれば, $\deg_K(p) = \deg_K(q) = 1$ であることがわかる. K において, p と q の色が同じ k -彩色があれば, $K_{k+1} - \{pq\}$ の k -彩色と合わせて, G の k -彩色が得られる. 帰納法の仮定より, K は k -彩色可能であり, $k \geq 3$ であるから, $K - \{p, q\}$ の k -彩色において, p の唯一の近傍と q の唯一の近傍の色が異なっているとしても, p と q を同色にする k -彩色を構成できる. したがって, p と q が同色になる G の k -彩色を構成することができる. ■

グラフの染色数が高ければ, 完全グラフに近いという事実が成り立ちそうだが, そのようなことは成り立たない. 実際に, 次の定理が成り立つ.

定理 6.5 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して, 染色数が k の三角形を含まないグラフ G が存在する.

証明. $k = 2$ に対しては, G として 2 部グラフを考えればよい. また, $k = 3$ のとき, G として 奇閉路を考えればよい. $k \geq 4$ に対して, 染色数 $k - 1$ の三角形を含まないグラフ H を用いて, 染色数 k のグラフ G を構成する.

$V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$ とおき, 頂点 u_1, \dots, u_n を用意する. そして, 任意の i, j に対して, $v_i v_j \in E(H)$ のとき, 辺 $u_i v_j, v_i u_j$ を追加する. そして, 新しい頂点 x と u_1, \dots, u_n を辺で結ぶ. 得られたグラフを G とする. H に三角形がないので, G にも三角形がないことに注意せよ.

まず, $\chi(G) \geq k$ であることを示す. G が $(k - 1)$ -彩色可能であるとする. このとき, x は色 $k - 1$ で塗られているとしてよい. すると, $N_G(x) = \{u_1, \dots, u_n\}$ は $k - 2$ 色以下で塗られている. $\chi(H) = k - 1$ だから, H には色 $k - 1$ で塗られている頂点 v_i が存在する. そのそれぞれの v_i を u_i に塗られている色で塗れ. そうすると, H の $(k - 2)$ -彩色が得られ, $\chi(H) = k - 1$ に矛盾する. したがって, $\chi(G) \geq k$ である.

また, $c' : V(H) \rightarrow \{1, \dots, k - 1\}$ を H の $(k - 1)$ -彩色とすると, G に $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ によって色を与える: 頂点 $v \in V(G)$ に対して,

$$c(v) = \begin{cases} c'(v) & \text{if } v \in \{v_1, \dots, v_n\} \\ c'(v_i) & \text{if } v = u_i \\ k & \text{if } v = x \end{cases}$$

これは, G の k -彩色になっていることから, $\chi(G) \leq k$ である. ゆえに, $\chi(G) = k$ である. ■

ここで, グラフの彩色の応用を考えることにする. 図 6.1 の左は交差点における車の進行方向を示したものである. この交差点では, 図に示した以外に向かう車はないとする. この交差点に信号を設置したい. そして, その信号の周期をなるべく小さくして, 効率良く車を流したい.

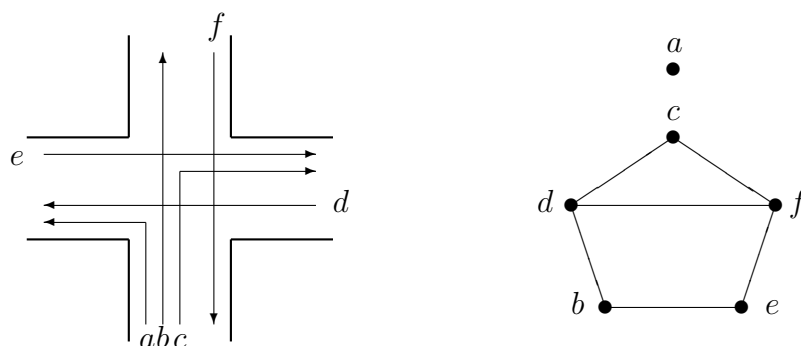


図 6.1: 進行方向の関係とそのグラフ

そこで, 各進行方向を頂点で表し, それらが交わるときに辺で結ぶことにし, グラフ G を構成する. (図 6.1 の右図参照.) 交わらない進行経路の信号は同時に青にしてもよいが,

交わっている方向の信号を同時に青にはできない. この事実を考えると, G の隣接する頂点を異なる色で塗る G の色付け, すなわち G の彩色, に対応する信号の設定が可能であることがわかる. したがって, 信号の周期を $\chi(G)$ にするのが1番効率的であり, それ以下にできない.

6.2 平面グラフの彩色

平面グラフの彩色に対して, 次の有名な定理がある. この定理は“**四色定理**¹”と呼ばれている.

定理 6.6 (四色定理) 任意の平面地図は隣接する国が異なる色を持つように, 4色で塗り分けることができる.

これは平面グラフ G の互いに辺で接する面を異なる色になるように, 面全体を4色で塗り分けられることを主張するものである. しかし, その双対グラフを考えると, 辺で接する2つの国は隣接した2頂点に対応するので, 上の四色定理は次のグラフの頂点彩色の定理へと翻訳できる.

定理 6.7 (四色定理, アッペルとハーケン) 任意の平面グラフは4-彩色可能である. ■

4色で塗ることはたいへん難しいが, 6色で塗れることなら, 直ちに示すことができる.

命題 6.8 任意の平面グラフは6-彩色可能である.

解答. 頂点数に関する帰納法を用いる. 頂点数が6以下のとき, 定理は成り立つ. 命題 5.3により, 任意の平面グラフは G は次数5以下の頂点 v を持つ. 帰納法の仮定から, $G - \{v\}$ は6-彩色可能である. G における v の近傍は5つ以下なので, 6色持っていれば, v にすべての近傍の色と異なる色を塗ることができる. ■

命題 6.8 の証明において, もう少し頑張れば, 色数を1つ減らすことができる.

定理 6.9 任意の平面グラフは5-彩色可能である.

証明. 頂点数が少なければ明らかである. 平面グラフ G は, 命題 5.3により, 次数5以下の頂点 v を持つ. 帰納法の仮定により, $G' = G - \{v\}$ は5-彩色可能である. v の次数が4以下なら, 命題 6.8と同様に G の5-彩色が構成できる. 唯一うまくいかない場合は, $\deg_G(v) = 5$ であり, かつ, v の近傍 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 のすべてが G' の彩色において, 異なる

¹ 1852年, フランシス・ガスリーはこの四色問題をケンブリッジの数学科の学生である弟に質問した. そして, 1878年にケーリーがロンドン数学会にこの問題を提出し, 世に広まることになった. 1年後, ケンペが間違った証明を与え, 18年間信じられていた. しかし, その後ヒーウッドが間違いを指摘し, 五色定理を証明した. 終に1977年, アッペルとハーケンにより, 四色定理は終に証明された. この定理の証明方針は単純であるが, その証明では, 1482個の場合分けを潰すため, コンピュータを長い時間動かしている. 現在では, 同じアイデアによる, 短い証明も与えられているが, 依然としてコンピュータが使われている.

色で塗られている場合である. このとき, G' において頂点 v_i は色 i で塗られているとする ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

もし, G' の 5-彩色において, 頂点 v_1 の色を 3 に塗りかえることができれば, 頂点 v に色 1 を塗ることができ, G の 5-彩色が完成する. もし, v_1 が 3 で塗られた頂点に隣接してなければ, v_1 を 3 で塗ることができる. したがって, v_1 は 3 で塗られた頂点に隣接している. もしも, この 3 で塗られた頂点のすべてが 1 で塗られた頂点に隣接していなければ, v_1 に塗られた色 1 と, v_1 に隣接する 3 で塗られた頂点の色を交換することにより, v に色 1 を塗ることができる. したがって, このような色の塗り替えができないのは, v, v_1 を通り, 3 で塗られた頂点と 1 で塗られた頂点を交互にたどり v_3 に到達し, v に戻る閉路が存在するときである. これを (1, 3)-ケンペ鎖という.

さて, ここで v_2 を 4 で塗りかえられるかどうかを考える. 前の議論と同様に, それができれば v を 2 で塗ることができ, G の 5-彩色ができあがる. v_2 を 4 で塗りかえられないのは, (2, 4)-ケンペ鎖が存在するときのみであるが, v_2 と v_4 は (1, 3)-ケンペ鎖の内側と外側に含まれるので, (2, 4)-ケンペ鎖は存在することができない. したがって, v_2 は 4 で塗ることができ, G の 5-彩色を構成することができる. ■

平面グラフに関する四色定理は非常に難解なものである. しかしながら, 球面以外の曲面に関する彩色問題は, 以下に示すように, 実にすっきりと証明できる.

命題 6.10 $g \geq 1$ とする. G を M_g に埋め込まれているグラフとする. このとき, G の平均次数 \bar{d} は次のように与えられる:

$$\bar{d} \leq \frac{5 + \sqrt{48g - 1}}{2}$$

証明. 命題 5.18 より, $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3(2 - 2g)$ である. ゆえに,

$$\bar{d} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq 6 - \frac{6 - 6g}{|V(G)|}$$

である. 一方, G は単純グラフであるから, $\bar{d} \leq |V(G)| - 1$ である. したがって,

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \min \left\{ 6 - \frac{6 - 6g}{|V(G)|}, |V(G)| - 1 \right\} \\ &= \frac{5 + \sqrt{48g - 1}}{2}. \end{aligned}$$

ゆえに, 求める式が得られる. ■

命題 6.10 を用いて, 次の定理を証明する.

定理 6.11 (ヒーウッド) $g \geq 1$ とする. G を M_g に埋め込まれているグラフとする. このとき, 次の式が成り立つ:

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{48g - 1}}{2} \right\rfloor$$

さらに, すべての M_g に対して, 等号を満たすグラフが存在する.

証明. $|E(G)|$ に関する帰納法を用いる. $|E(G)|$ が小さいとき, 主張は明らかに成り立つ. そうでない場合, 命題 6.10 により, G は次数 $\left\lfloor \frac{5+\sqrt{48g-1}}{2} \right\rfloor$ 以下の頂点 v を持つ. 帰納法の仮定より, $G-v$ は $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{48g-1}}{2} \right\rfloor$ 色以下で塗られている. したがって, いつでも, v には v の近傍に現われていない色を塗ることができる. したがって, $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{48g-1}}{2} \right\rfloor$ である.

また, 命題 5.20 の式において, $\varepsilon(K_n) = g$ とおき, n について解くと, $n = \frac{7+\sqrt{48g-1}}{2}$ が得られる. このことは, M_g に $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{48g-1}}{2} \right\rfloor$ 頂点からなる完全グラフが埋め込み可能であることを示している. したがって, すべての M_g に対して, $\chi(G) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{48g-1}}{2} \right\rfloor$ となるグラフ G が存在することがわかる. ■

染色数決定の問題が, 球面以外の曲面でこのように簡単に解決できる理由は, 最小次数の評価だけで, 帰納法がかかってしまう当たり前の値が, 最善の値と一致しているからである. しかしながら, 球面の場合, 当たり前の値は 6 であるのに対し (命題 6.8 参照), 本当の値は 4 であり, 2 という差を埋めなければならない. それが四色定理の難しさになっている. 差を 1 だけ埋めるのにも, 非常にエレガントな解法を必要としている (命題 6.9 参照).

グラフ G が**外平面的**であるとは, G をすべての頂点が外領域に接する同一の閉路に載っている平面グラフとして, 平面に埋め込めることである. このように埋め込まれた平面グラフを**外平面グラフ**という. 外平面グラフ G における外領域に接する閉路を G の**境界**という.

命題 6.12 任意の外平面グラフは 3-彩色可能である.

証明. 外平面グラフのある有限面が三角形でないとき, それに対角線を加えて, 三角形にできるので, 有限面がすべて三角形の外平面グラフ G について (これを**極大外平面グラフ**という), 3-彩色可能であることが証明できれば, もとの外平面グラフも 3-彩色可能であることがわかる.

まず, 極大外平面グラフ G は, 境界上に指定した任意の辺 e に対して, e の端点以外に次数 2 の頂点を持つことを証明する: 頂点数 n に関する帰納法を用いる. $n = 3$ のとき, 明らかに主張は成り立つ. $n \geq 4$ のとき, G は境界に含まれない辺 f をもつ. このとき, G は f のみを共有する 2 つの極大外平面グラフ H と K に分解できる. 帰納法の仮定により, H と K は f の端点以外に次数 2 の頂点 v_H と v_K を持つ. G において, v_H と v_K は非隣接であるから, G の境界上に任意に指定した辺 e に対して, e の端点以外の次数 2 の頂点が存在する.

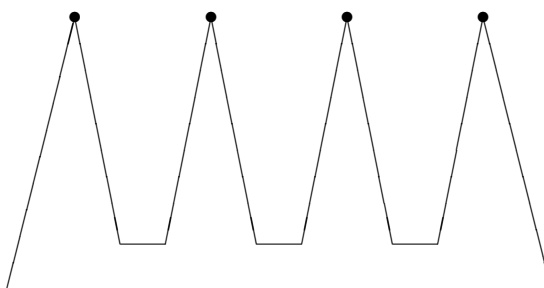
G を $n \geq 3$ 頂点の極大外平面グラフとする. $n = 3$ のとき, 明らかに 3-彩色可能である. $n \geq 4$ のとき, G は次数 2 の頂点 v を持つので, $G' = G - \{v\}$ を考える. G' も再び極大外平面グラフであるから, 帰納法の仮定により, G' は 3-彩色可能である. v にその 2 つの近傍に現れてない色を塗ることにより, G の 3-彩色が得られる. ■

命題 6.12 の系を用いて, 次の問題の解答を与える.

問題 6.13 (美術館問題) n 角形の博物館がある. そこに監視カメラを置き, 防犯の対策を取りたい. どんな (凸とは限らない) n 角形の博物館でも, すべての場所を監視するには, 最低何台の監視カメラを設置すればよいか.

注意. 当然, n 角形のすべての角に監視カメラを置けば, 博物館の内部のどの場所も監視できる. 本当に n 個の監視カメラが必要な n 角形の博物館が存在するのだろうか. 上の問題では, 任意の n 角形博物館を見張る監視カメラの最小台数を問題にしている.

解答. 考える n 角形に適当に対角線を追加すると, 外領域が n 角形の極大外平面グラフ G が得られる. 命題 6.12 により, G は 3-彩色可能である. したがって, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 以下の同色の頂点が存在する. これらの頂点の場所に監視カメラを置く. 博物館の内部の任意の場所は G のある三角形の中に含まれ, さらに, その三角形の境界にはすべての色の頂点が見れているから, 高々 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 個の監視カメラで博物館全体を見張ることができる.



上の 12 角形の博物館において, 4 つの黒頂点を置いた部分がある. 1 台の監視カメラでこのうちの 2 つ以上を同時に監視することはできない. したがって, この 12 角形の博物館を見張るためには, 4 台以上の監視カメラが必要である. この例により, 任意の $n \equiv 0 \pmod{3}$ についての例が構成できるであろう. ゆえに, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 台の監視カメラが必要な n 角形博物館が存在し, 上の評価 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ が最良であることを示せた. ■

6.3 染色多項式

グラフの彩色に関係し, グラフ G に 1 変数の多項式を対応させるというおもしろい話題に触れようと思う.

t 色による完全グラフ K_3 の彩色の総数 $f(K_3, t)$ を求めてみよう. 当然, $\chi(K_3) = 3$ であるから, $f(K_3, 0) = f(K_3, 1) = f(K_3, 2) = 0$ である. また, 3 色による 3-彩色の総数 $f(K_3, 3)$ は色 1, 2, 3 の順列の総数 $3!$ だけあり, $t \geq 3$ のとき, $f(K_3, t) = \binom{t}{3} 3!$ である. したがって, 任意の正整数 t に対して,

$$f(K_3, t) = t(t-1)(t-2)$$

である. 次の定理は任意のグラフ G に対して, このような多項式を決定する公式である.

定理 6.14 (染色多項式) グラフ G に対して,

(i) $G = \overline{K}_t$ のとき,

$$f(G, t) = t^n.$$

(ii) $|E(G)| > 0$ のとき,

$$f(G, t) = f(G - e, t) - f(G/e, t),$$

ただし, $G - e$ と G/e はそれぞれ G から G のある辺 e を除去と縮約をして得られたグラフである. このとき, $f(G, t)$ は G の t -彩色の総数を表す.

証明. G が n 個の孤立点からなる場合, 各頂点に対して, t 通りの色付けの方法があるので, 全体で t^n 通りの色付けの方法がある. したがって, (i) は明らかである.

$e = xy$ を G の辺とする. G の t -彩色は $G - e$ の t -彩色のうち, x と y に与えられた色が異なるものと見ることができる. 一方, G/e の t -彩色は G の t -彩色のうち, x と y に与えられた色が同じものに対応している. したがって, $f(G, t) = f(G - e, t) - f(G/e, t)$ である.

■

注意. G が単純であっても, G/e は必ずしも単純にはならない. すなわち, G/e は多重辺を持つかもしれない. しかし, 多重辺を持つグラフの t -彩色の総数は, 多重辺を1本の辺で置き換えた単純グラフの t -彩色の総数と等しいので, 変形の途中で多重辺が生じたとき, それを1本に置きかえればよい.

染色多項式の定義により, グラフ G の染色数が k のとき,

$$f(G, 0) = f(G, 1) = f(G, 2) = \cdots = f(G, k - 1) = 0$$

であり, t についてのある多項式 $g(t)$ に対して,

$$f(G, t) = t(t - 1) \cdots (t - k + 1)g(t)$$

という形をしている. さらに, (ii) の定義から, 辺の除去を繰り返すことにより, n 頂点のグラフ G は \overline{K}_n に変形できるので, G の染色多項式 $f(G, t)$ は t^n を項として含むことがわかり, それが最大次数になることがわかる. したがって,

$$f(K_n, t) = t(t - 1)(t - 2) \cdots t(t - k + 1)$$

である. 実際, 次のようになる:

$$\begin{aligned} f(\triangle, t) &= f(\triangleleft, t) - f(\bullet\text{---}\bullet, t) \\ &= f(\bullet\text{---}\bullet, t) - 2f(\bullet\text{---}\bullet, t) \\ &= f(\bullet\text{---}\bullet, t) - f(\bullet\ \bullet, t) - 2(f(\bullet\ \bullet, t) - f(\bullet, t)) \\ &= t^3 - t^2 - 2(t^2 - t) \\ &= t(t - 1)(t - 2) \end{aligned}$$

問題 6.15 定義により, 次のグラフの染色多項式を求めよ. (また, グラフの構造から t -彩色の個数を求めよ.)



命題 6.16 n 頂点の木 T_n について,

$$f(T_n, t) = t(t-1)^{n-1}.$$

証明. n に関する帰納法を用いる. $n = 1$ のとき, $f(T_1, t) = t$ であり, 命題は成り立つ. $n \geq 2$ とする. 命題 1.4 より, T_n は次数 1 の頂点 v を持つ. $T_n - v$ は $n - 1$ 点の木である. 帰納法の仮定より, $f(T_n - v, t) = t(t-1)^{n-2}$ である. したがって, $T_n - v$ の t -彩色の総数は $t(t-1)^{n-2}$ 通りである. そのそれぞれにおいて, v の塗り方の総数は, v の唯一の近傍の色以外の色を塗ることができるので, $t - 1$ 通りである. ゆえに,

$$f(T_n, t) = t(t-1)^{n-2} \times (t-1) = t(t-1)^{n-1}$$

である. したがって, 命題が成立つ. ■

木を一般化した概念として, k -木というものがある. k -木とは以下のように構成されるグラフ H_i である: まず, $H_1 = K_{k+1}$ とする. 新しい頂点を加え, それを H_{i-1} の部分完全グラフ K_k のそれぞれの頂点に結び, 得られたグラフを H_i とする.

定義より, k -木の頂点数は $k + 1$ 以上であり, k -木は次数 k の頂点を持つ. 1-木は通常の木である. また, 極大外平面グラフは 2-木である. (しかし, その逆は成り立たない.)

次は, 命題 6.16 を含んでいる.

命題 6.17 n 頂点の k -木 H_n について,

$$f(H_n, t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-k)^{n-k}.$$

証明. n に関する帰納法を用いる. $n = 1$ のとき, $f(K_{k+1}, t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-k)$ であり, 命題は成り立つ. $n \geq 2$ のとき, 定義より, H_n は次数 k の頂点 v を持つ. $H_n - v$ は $n - 1$ 点の k -木である. 帰納法の仮定より, $H_n - v$ の t -彩色の総数は

$$f(H_n - v, t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-k)^{n-k-1}$$

である. そのそれぞれにおいて, v の塗り方の総数は, v の K_k を形成する k 個の近傍に現われてないすべての色を塗ることができるので, $t - k$ である. ゆえに,

$$f(H_n - v, t) = t(t-1)\cdots(t-k)^{n-k-1} \times (t-k) = t(t-1)\cdots(t-k)^{n-k}$$

である. したがって, 命題が成立つ. ■

第7章 ラムゼー現象

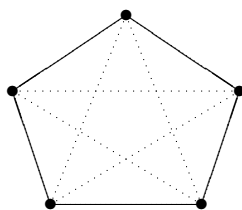
7.1 ラムゼーの定理

定理 7.1 (ラムゼー) 任意の3つの自然数 n, k, m について、次を満たす自然数 $N(n, k, m)$ が存在する: 集合 X が $|X| \geq N(n, k, m)$ ならば、 X の k 個組全体からなる集合 $\binom{X}{k}$ の各要素にどのように m 色を与えても n 個の要素からなる X の部分集合 X' で、 X' のどの k 個組も同色で塗られているようなものが存在する¹.

自然数 $N(n, k, m)$ を**ラムゼー数**という。ラムゼー現象とは、「莫大な数の対象が集まると、その中には必ずよい性質を持ついくつかが存在する」、または、「たくさんものをどんなにでたらめに集めようとしても、そこにはある避けられない一定の秩序が存在してしまう」という現象をいう。

問題 7.2 6頂点からなる完全グラフの各辺にどのように赤、青を与えても、赤い三角形か青い三角形が存在してしまう。また、 K_5 の各辺に赤、青を与え、赤い三角形も青い三角形も現れないようにできることを証明せよ。これは、 $N(3, 2, 2) = 6$ であることを証明している。

解答. K_6 の頂点を a_1, \dots, a_6 とし、 K_6 の赤と青による辺着色を任意に固定する。頂点 a_1 には同色の辺が3本以上接続している。それを v_1v_i, v_1v_j, v_1v_k とし、赤で塗られているとしてよい。辺 v_iv_j, v_jv_k, v_iv_k のうちのどれか (v_iv_j とする) が赤で塗られていれば、赤い三角形 $v_1v_iv_j$ ができるし、すべてが青で塗られていれば、青い三角形 $v_iv_jv_k$ ができる。



K_5 の上のような辺着色を考えれば、同色の三角形は存在しない。■

問題7.2の結果より、次の系が導かれる。

¹ 数式を用いると次のようになる: 任意の $n, k, m \in \mathbb{N}$ に対して、次の $N(n, k, m) \in \mathbb{N}$ が存在する: 任意の写像 $f: \binom{X}{k} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ に対して、ある $X' \subset X$ が存在して、 $|X'| = n$ であり、任意の $x \in \binom{X'}{k}$ について、 $f(x) = i$ となる $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ が存在する。

系 7.3 頂点数 6 以上の任意のグラフ G に対して, G またはその補グラフ \overline{G} は長さ 3 の閉路を含む.

問題 7.4 完全グラフ K_n の各辺にどのように赤, 青, 黄色の色を与えても同色の三角形が生じてしまうためには, n をいくら以上にとっておけばよいか. この n の最良の値はどのようなラムゼー数か.

解答. $n \geq 17$ とする. K_n の 3 色による辺着色を任意に固定する. 頂点 v に接続する同色 (赤とする) の辺は $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 6$ 本以上ある. それを $vv_1, vv_2, vv_3, vv_4, vv_5, vv_6$ とする. $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ で誘導される完全グラフ K_6 の辺のうちの 1 本でも赤で塗られていると, 赤い三角形ができてしまう. そうでなければ, その K_6 のすべての辺が青と黄色で塗られていることになり, 問題 7.2 の結果により, その中には青い三角形か黄色い三角形が存在する. (しかしながら, $N(3, 2, 3) = 17$ かどうかは明らかでない.) ■

次の例はどのようなラムゼー数 $N(n, k, m)$ によっているか.

例 7.5 クラスの人数が十分に多くなれば, ある 10 人の生徒が存在して, その中のどの 4 人が顔を合わせても麻雀に行ってしまうか, まじめに授業に出るかである. (この例では, そのクラスのどの 4 人が顔を合わせても, 真面目に授業に出るか麻雀に行ってしまうかのどちらかでなければならない.)

例 7.6 夜空の星の中 (十分多い) には, その中のどの 2 個の星も互いに近づいている, 互いに静止している, または, 互いに遠ざかっているような 1000 個の星がある.

例 7.7 どの 3 点も同一直線上に位置しないように, 平面上に十分多くの点を配置する. そのとき, どの 3 点も直角三角形になるか, どの 3 点も鋭角三角形になるか, どの 3 点も鈍角三角形になるような 50 点が存在する.

7.2 グラフ理論におけるラムゼーの定理

系 7.3 を一般化した定理を紹介する.

定理 7.8 任意の自然数 r に対して, 次を満たす自然数 n が存在する: n 個以上の頂点を持つ任意のグラフは K_r か $\overline{K_r}$ を部分グラフとして含む.

証明. $r = 1$ のとき, 明らかであるから, $r \geq 2$ とする. $n = 2^{2r-3}$ とおき, n 頂点のグラフ G を考える. そして, $V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3 \sqcup \cdots \sqcup V_{2r-2}$ を次のようにとる:

(i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2r-2$),

(ii) $V_i \subset V_{i-1} - \{v_{i-1}\}$,

(iii) v_{i-1} は V_i のすべての頂点に隣接しているか、または、隣接していないかのどちらかである。

具体的には、 $V_1 = V(G)$ とし、 $v_1 \in V_1$ を適当に選ぶ。このとき、 $|V_1 - \{v_1\}| = 2^{2r-3} - 1$ だから、 $V_1 - \{v_1\}$ には v_1 と隣接している 2^{2r-4} 頂点か、 v_1 と隣接していない 2^{2r-4} 頂点を選ぶことができる。それを V_2 とおく。以下同様に、 V_i から適当に v_i を選ぶと、 $V_i - \{v_i\}$ には v_i と隣接している 2^{2r-3-i} 頂点か、 v_i と隣接していない 2^{2r-3-i} 頂点を選ぶことができるので、それを V_{i+1} とする。このようにして、相異なる $v_1, v_2, \dots, v_{2r-2} \in V(G)$ を選ぶことができる。

v_i から V_{i+1} を選ぶとき、すべて v_i に隣接しているか、すべて v_i に隣接していないかを指定することはできなかつた。しかしながら、その選択の回数は $2r - 3$ 回であり、そのうちの $r - 1$ 回は同じタイプであったはずである。(1回の選択は v_i と v_{i+1} が辺で結ばれるかどうかを選んでいるので、 $r - 1$ 回の同じタイプの選択の後には、互いに辺で結ばれた r 頂点か、互いに辺で結ばれない r 頂点が発見できることに注意せよ²。) したがって、 v_1, \dots, v_{2r-2} のうちの r 点を使う K_r または $\overline{K_r}$ を発見することができる。■

次は、完全2部グラフの中の単色完全2部グラフの存在を保証する定理である。

定理 7.9 任意の自然数の組 (k, m, n) に対して、次のような自然数の組 (M, N) が存在する：完全2部グラフ $K_{M,N}$ の辺を任意に k 色で着色すると、単色の $K_{m,n}$ が存在する。

証明. $K_{X,Y}$ を部集合 X, Y を部集合とする完全2部グラフとし、 $|X| = M, |Y| = N$ とする。また、着色 $c : E(K_{X,Y}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ を任意に固定する。このとき、任意の写像 $f : Y \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ に対して、

$$A_f = \{x \in X : \text{任意の } y \in N_{K_{X,Y}}(x)(= Y) \text{ に対して, } c(xy) = f(y)\}$$

とおくと、

$$X = \bigcup_f A_f$$

は X の分割になっている。写像 f は k^N 通り存在するので、

$$|X| = M \geq (m - 1)k^N + 1$$

となるように M を選べば、 $|A_f| \geq m$ となる f が存在する。さらに、

$$|Y| = N \geq (n - 1)k + 1$$

となるように N を選べば、任意の f に対して、 $|f^{-1}(i)| \geq n$ となる $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ が存在する。このとき、 $A \subset A_f, B \subset f^{-1}(i), |A| = m, |B| = n$ とすると、 $K_{A,B}$ の辺はすべて色 i で着色されている。上で選んだ M と N は、着色 c に依存しない値になっているので、この (M, N) に対して、定理が成り立つ。■

² これは植木算による。すなわち、 k 本の植木が一直線上に並んでいるとき、その間隔の総数は $k - 1$ である。

第8章 ネットワーク

各辺が矢印になっているグラフ D を**有向グラフ**という. 頂点 x から頂点 y に向かう矢印 (これを辺と呼ぶ) を xy と表す. (したがって, 有向グラフにおいて, 辺 xy と辺 yx は同じではない.) 写像 $c: E(D) \rightarrow \mathbf{Z}$ を考える. 有向グラフ D と写像 c の組 (D, c) を**ネットワーク**という (図 8.1 参照). ここで, 辺 $e \in E(D)$ に対する $c(e)$ を e の**容量**という.

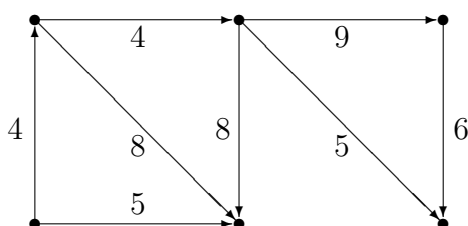


図 8.1: ネットワーク

ネットワーク (D, c) と相異なる 2 頂点 $x, y \in V(D)$ を考える. x から出発する辺と y に向かう辺は存在しないと仮定する. このとき, x を**入り口**, y を**出口**という. 写像 $f: E(D) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ が x から y への**流れ**であるとは, 次の 2 つの条件を満たすことである.

(i) 任意の辺 $e \in E(D)$ に対して, $0 \leq f(e) \leq c(e)$.

(ii) 任意の頂点 $v \in V(D) - \{x, y\}$ に対して,

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E(D)} f(vu) = \sum_{uv \in E(D)} f(uv) = f^-(v).$$

(iii) $x, y \in V(D)$ に対して, $f^+(x) > 0, f^-(y) > 0$.

(ii) より, $f^+(x) = f^-(y)$ であることがわかる. $f^+(x) = \text{val } f$ とおき, **流量**という.

問題 8.1 図 8.2 のネットワークの流量を最大にせよ.

$S \subset V(D)$ に対して, $x \in S$, かつ, $y \in V(D) - S = \bar{S}$ であるとき,

$$[S, \bar{S}] = \{uv \in E(D) : u \in S, v \in \bar{S}\}$$

を**カット**という. このとき, x から y に向かうすべての経路は必ず $[S, \bar{S}]$ を通過するので, 明らかに $\max \text{val } f \leq \sum_{e \in [S, \bar{S}]} c(e)$ である.

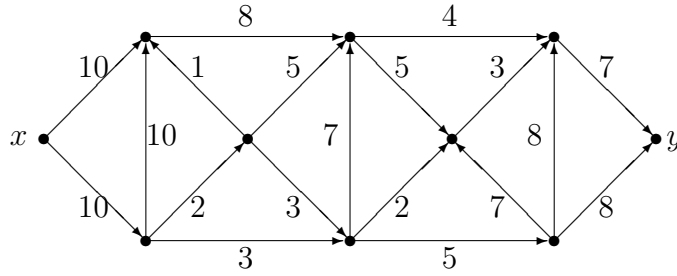


図 8.2: 最大流を構成せよ

定理 8.2 (最大流-最小カット定理) 任意のネットワークの最大流の大きさは最小カットの大きさに等しい.

まず, ネットワーク N が許す任意の流れの大きさ F と N 中のカットの任意の大きさ C との関係を考えよ. すると,

$$F \leq C$$

であることがわかる. このことから, 定理 8.2 において, 最大流の大きさは最小カットの大きさ以下であることがわかる.

定理 8.2 の証明の前に, 証明のために使う用語を定義しておく: D を有向グラフとする. 頂点 $v_i \in V(D)$ と辺 $e_i \in E(D)$ の交互列

$$P = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$$

を考える. P において, $e_i = v_{i-1}v_i$ または $e_i = v_iv_{i-1}$ のとき, P を D の**半道**であるという. すなわち, D の半道とは, 辺の向きを無視したときに, 道になっているものである.

容量 $c: E(D) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ と流量 $f: E(D) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ に対して, 半道 P の各辺 e_i ($i = 1, 2, \dots, k$) に対して, 値 $l(e_i)$ を次のように定義する.

- (i) $e_i = v_{i-1}v_i$ のとき (順行の場合), $l(e_i) = c(e_i) - f(e_i)$ とおく.
- (ii) $e_i = v_iv_{i-1}$ のとき (逆行の場合), $l(e_i) = f(e_i)$ とおく.

さらに,

$$l(P) = \min\{l(e_i) : i = 1, 2, \dots, k\}$$

とおく. 定義より, $l(P) \geq 0$ であり, $l(P) = 0$ のとき, P は**飽和**しているという. $l(P) > 0$ のとき, P の流量を $l(P)$ だけ増やすことができることがわかる. 入り口 x から出口 y に至る飽和していない半道を, f に関する D の**増大**道という.

命題 8.3 ネットワーク D の流れ f が最大流であるための必要十分条件は, D が f に関する増大道を持たないことである.

証明. 必要性は明らかであるから、十分性のみを証明する。入り口 x から f に関して非飽和な半道で到達できる頂点全体からなる集合を S とおく。ただし、 $x \in S$ であるとする。 D には f に関する増大道路が存在しないので、 $y \notin S$ 、すなわち、 $y \in V(D) - S = \bar{S}$ である。したがって、 $[S, \bar{S}]$ はカットである。さらに、 S の定義から、任意の辺 $e \in [S, \bar{S}]$ に対して、 $c(e) = f(e)$ であり、任意の辺 $e \in [\bar{S}, S]$ に対して、 $f(e) = 0$ である。したがって、 $\text{val } f = \sum_{e \in [S, \bar{S}]} c(e)$ であり、 D は $\text{val } f$ より大きい流れを持たない。ゆえに、 f は最大流である。■

定理 8.2 証明. 命題 8.3 では、 f に関する非飽和な増大道路がないとき、 f の大きさに等しいカット K が存在することを証明している。このとき、 f が最大流であり、 K は最小カットである。■

最大流-最小カット定理は、与えられたネットワークの最大流を求めるときは、最小カットを探せばよいと主張している。しかしながら、与えられたネットワークが複雑な場合、最小カットを見つけることはそう簡単ではないだろう。

実際、次のようにして、最大流を求めることになる。まず、最小カットと思われる辺集合 E に着目する。 E が最小カットなら、 E を飽和する流れが構成できるはずである。それができなければ、最大流-最小カット定理より、もう少し小さいカット E' が存在するはずである。そして、また、 E' を飽和する流れが構成できるかどうかを考える。これを繰り返し、着目したカットの大きさに等しい流れが構成できた時点で、最大流と最小カットが同時に見つかったことになる。

第9章 その他

この章では、どの章にも含めることができなかつた問題を紹介する。それぞれの節は自己完結しており、それぞれの話題を1時間か2時間の授業の扱うことが可能であると思われる。このうちのどれも離散数学的発想により、問題がうまく解決できるものである。数学において、1つの問題をじっくりと時間をかけて考えるという態度はとても重要である。その数学的現象が何を意味しているのか、また、その考え方はどの程度まで発展できるのか、そのようなことがしっかりと考えられる問題を集めてみた。

9.1 数え上げの方法—部分集合の総数

問題 9.1 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。このとき、 X の部分集合の総数を求めよ。

高校の数学の教科書に出てくる問題である。数通りの解答があるだろうが、次のものが一般的であろう。

解答. X の任意の部分集合 A は、 X の各要素が A に含まれるかどうかを指定することによって決定される。したがって、その指定の仕方と X の部分集合の間には、一対一対応が存在する。 X の要素は n 個あり、そのそれぞれが A に含まれるかどうかで、2通りの指定の仕方があり、それらは独立なので、全体では 2^n 通りの指定の仕方がある。ゆえに、 X の部分集合の総数も 2^n である。■

ものの個数を勘定するとき、それと一対一対応する対象を数えることがある。この問題は、生徒がそのような数学的考え方と初めて出会う機会を提供してくれるものであろう。

問題 9.1 を次のように発展させられる。

問題 9.2 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。このとき、 $A \subseteq B \subseteq X$ なる順序対¹ (A, B) の総数を求めよ。

なかなか難しいので、とりあえず、力づくで答を求めてみよう。

¹ 順序対 (A, B) とは、順序を区別する A と B からなる組であり、 $(A, B) = (A', B') \iff A = A'$ かつ $B = B'$ である。

解答. X の部分集合 B で、 $|B| = j$ なるものの総数は $\binom{n}{j}$ である ($j = 0, 1, \dots, n$). そのとき、固定された B に対して、 $A \subseteq B$ なる A の総数は、問題 9.1 の解答により、 2^j である. ゆえに、二項定理より、 (A, B) の選び方の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \times 2^j &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \times 2^j \times 1^{n-j} \\ &= (2 + 1)^n = 3^n \end{aligned}$$

である. ■

とてもかつこよく二項定理が使えた. 少々充実感に浸れるきれいな問題だったと思う. 調子に乗って、問題 9.1 と問題 9.2 を次のように拡張しよう.

命題 9.3 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq X$ なる k 個組² (A_1, A_2, \dots, A_k) の総数は $(k + 1)^n$ である.

証明 (その 1). k についての帰納法を用いる. $k = 1$ のとき、問題 9.1 の解答より、命題は正しい. したがって、 $k \geq 2$ とする.

X の部分集合 A_k で、 $|A_k| = j$ なるものの総数は $\binom{n}{j}$ である ($j = 0, 1, \dots, n$). 帰納法の仮定により、 $|A_k| = j$ なる各 A_k について、

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_{k-1} \subseteq A_k$$

なる $(k - 1)$ 個組 $(A_1, A_2, \dots, A_{k-1})$ の総数は k^j である. ゆえに、二項定理より、 (A_1, A_2, \dots, A_k) の選び方の総数は

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \times k^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \times k^j \times 1^{n-j} = (k + 1)^n$$

である. ■

ここで、図 9.1 を再び見て、落ち着いて考えてみよう. $X = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq X$ を固定することは、図 9.1 において、どうすることに対応しているだろうか. この問題は、漠然と考えているとなかなか難しいが、図 9.1 のような絵を描くという態度があると、たちまち解けてしまう. 計算数学に埋没していると、なかなかこのようには考えられない. 普段から、絵を描いて考えよう.

証明 (その 2). $X = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq X$ を固定することは、図 9.1 において、各要素をどこかの領域に配置することと同値である. すなわち、 k 個組 (A_1, A_2, \dots, A_k) 全体とそのような配置全体との間には、一対一対応が存在する. 領域は $k + 1$ 個あり、各要素の配置の仕方は独立に $k + 1$ 通りあるので、 X の要素の配置の仕方は $(k + 1)^n$ 通りである. これは、 (A_1, A_2, \dots, A_k) の個数に等しい. ■

² k 個組 (A_1, A_2, \dots, A_k) とは、 A_1, \dots, A_k からなる順序付けられた組である. 2 個組は順序対に他ならない.

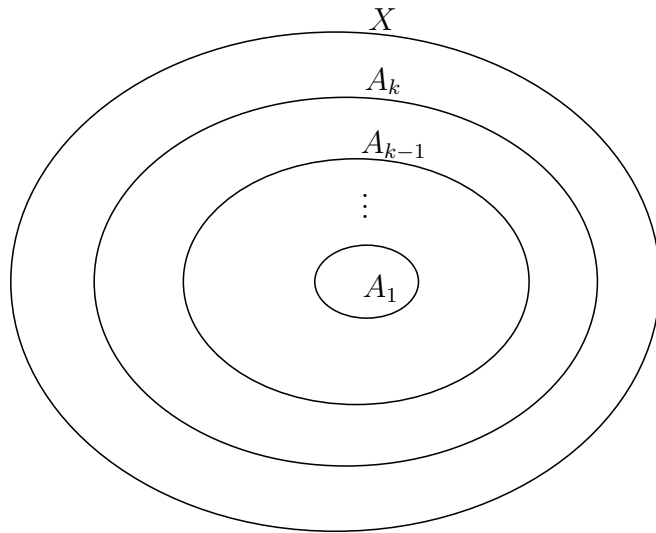


図 9.1: A_1, A_2, \dots, A_k の選び方

9.2 数え上げの方法—凸 n 角形の対角線の交点数

問題 9.4 平面上に凸 n 角形があるとする. その対角線をすべて引いたときに, 対角線どうしの交点は全部でいくつあるか. ただし, 3 本以上の対角線が 1 つの交点で交わることはないものとする.

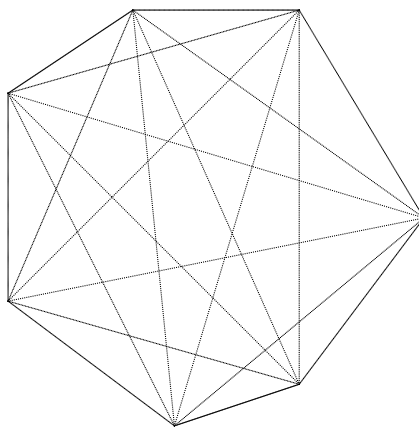


図 9.2: 凸 7 角形の対角線

たとえば, 図 9.2 のように凸 7 角形を考えみる. それが正 7 角形でなく少しゆがんでいるのは, 問題にある条件を満たすためである. 対角線の交点は 35 個ある.

余談だが, 正 n 角形の対角線をすべて引いたらどうなるだろうか. n が偶数のとき, 明らかに, $\frac{n}{2}$ 本の対角線が中央の 1 点で交わる. 一般の偶数 n に対して, 正 n 角形の 3 本以上の

対角線が交わる交点はたくさんあるが、その個数を求めるのはとても難しいらしい。一方、任意の奇数 n に対して、正 n 角形の対角線をすべて引くと、3 本以上の対角線が交わるような交点は生じない。この証明も非常に難しいと聞く。

n が小さいときに対角線の交点数を調べてみると、次の表が得られる。

| n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| 交点数 | 0 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 |

実は、この答えの一般形 (a_n とおく) は次のような 4 次式である。

$$a_n = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (n \geq 3)$$

上の表からこの式を予想するのはちょっと無理だろうが、この式が与えられていれば、これが答えになることを示すのは何とかなることだろう。たとえば、数学的帰納法でそれを証明することができるはずである。

証明 (その 1). まず、 $n = 3$ の場合は三角形だから、そもそも対角線はない。つまり、対角線の交点数は 0 である。実際、 a_n の式に $n = 3$ を代入すると 0 になるので、数学的帰納法の第一段階は成立している。

そこで、凸 $(n-1)$ 角形の対角線の交点数が

$$a_{n-1} = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

与えられると仮定して、凸 n 角形の対角線の交点数を数えてみよう。凸 n 角形の頂点を時計回りに X_1, X_2, \dots, X_n とおく。

図 9.2 を見れば明らかなように、頂点 X_n とそこから出ている辺と対角線を見捨ると、凸 $(n-1)$ 角形の図になる。ということは、頂点 X_n から出ている対角線とは無関係な交点の個数は、帰納法の仮定によって、 a_{n-1} である。ということは、 X_n から出ている対角線上の交点の個数を数えて、 a_{n-1} に足せば、 a_n が求まることになる。

頂点 X_n から出ている対角線とは、線分 $X_n X_j$ ($2 \leq j \leq n-2$) のことである。そして、その対角線 $X_n X_j$ と交わる対角線は $X_i X_k$ ($1 \leq i < j < k \leq n-1$) と表せる。この i の候補は $(j-1)$ 通りで、 k の候補は $(n-1-j)$ 通りである。したがって、対角線 $X_n X_j$ に載っている交点は $(j-1)(n-1-j)$ 個である。

この個数を合計すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (j-1)(n-1-j) &= \sum_{j=0}^{n-2} j(n-2-j) \\ &= (n-2) \sum_{j=0}^{n-2} j - \sum_{j=0}^{n-2} j^2 \\ &= (n-2) \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-1) - \frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

ゆえに, a_n は次の式で与えられることになる:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3).$$

そして, この式に帰納法の仮定の式を代入して整理すると, 目的の式が得られる. これで数学的帰納法が完結した. ■

一応, 解答が得られた. でも, $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \binom{n}{4}$ が, 何やら, 解答の出所のヒントを示唆していないだろうか. なぜなら, 交点の総数が, n 個のものから 4 個を取り出す方法の総数と一致するというのだから.

解答(その2). 与えられた凸 n 角形の n 個の頂点を任意に 4 個選んでみよ. その 4 個の頂点は凸 4 角形を作っていて, その内部にその頂点を端点とする 2 本の対角線が交点を 1 つ作っている. 逆に, 凸 n 角形の対角線の交点を任意に 1 つ選ぶと, その交点を作っている 2 本の対角線が定まり, その端点として, 凸 n 角形の頂点のうちの 4 個が指定できる. したがって, 交点の総数は $\binom{n}{4}$ である. ■

無味乾燥な計算処理の結果導き出した数式が意味を持つように, もう一度考えてみるという態度が必要である.

9.3 数え上げの手法—長方形の個数

図 9.3 のように, $n \times n$ 個の点とそれを結ぶ線分とで出来る図形を (n, n) -**正方格子** という. 本稿では, (n, n) -正方格子を, 左下の点を $(0, 0)$, 右上の点を $(n-1, n-1)$ と一致するように xy -平面に配置し, それぞれの点をその xy -平面内での座標を用いて表現する.

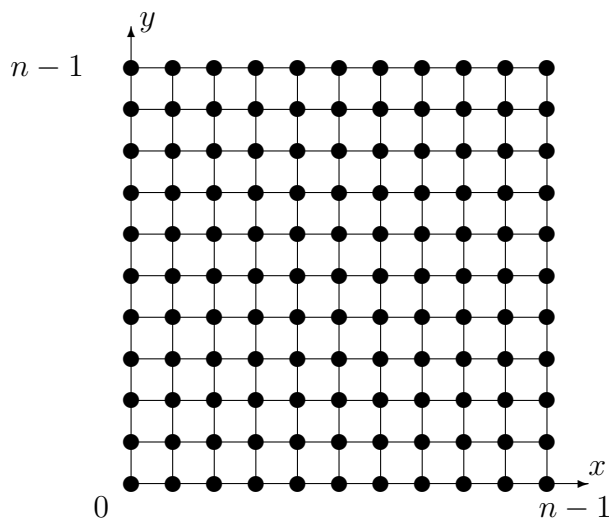


図 9.3: (n, n) -正方格子

問題 9.5 (n, n) -正方格子の中に, 長方形は何個存在するか.

この問題は実際, 高校の教科書に載っている問題である. 長方形は左下点と右上点を指定することによって一意に決まるので, 左下, 右上の点がそれぞれ $(i, j), (k, l)$ となる長方形は, $(i, j), (k, l)$ を通る 4 直線 $x = i, x = k, y = j, y = l$ により決まる. また, 任意に x 軸に平行な 2 直線と y 軸に平行な 2 直線をとっても, 線分がその 4 直線に載っている長方形が定まる. したがって, x 軸に平行な n 本の直線から 2 本, y 軸に平行な n 本の直線から 2 本選ぶ選びかたと, (n, n) -正方格子内の長方形の集合の間には全単射があり, その数は,

$$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2} = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2$$

である.

一方, (n, n) -正方格子上の $y \geq n - x$ を満たす点 (x, y) を除去した格子を, (n, n) -**階段格子**と呼ぶことにする.

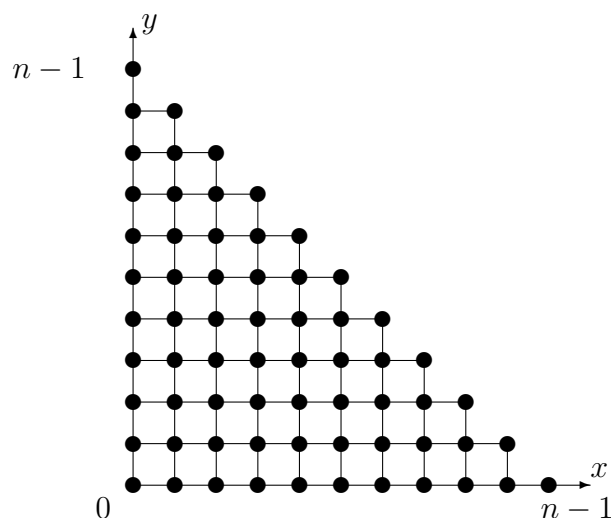


図 9.4: (n, n) -階段格子

問題 9.6 (n, n) -階段格子には何個の長方形が存在するか.

問題 9.5 を踏まえて直ちに問題 9.6 のエレガントな解答は思い浮かばないだろう. だから, 少々強引なやり方でまず正解を求めてみよう. 問題 9.5 と同様に, 長方形は左下と右上の点を指定することで決まる. 左下点を $(0, 0)$ とする長方形の右上の点になりえる候補は, (n, n) -階段格子内の整数点 $\{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\}$ であり, 個数は $1 + \dots + (n - 2)$ である. また, 左下点を $(0, 1)$ とする長方形の個数は同様に $1 + \dots + (n - 3)$ であり, 左下点を y 軸上に持つ長方形の個数は

$$1 + (1 + 2) + \dots + (1 + \dots + n - 2) = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^i j$$

また、同様に左下点を直線 $x = 1$ 上に持つ長方形の個数は

$$1 + (1 + 2) + \cdots + (1 + \cdots + n - 3) = \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^i j$$

となり、最終的に (n, n) -階段格子には

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^i j + \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^i j + \cdots + \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^i j = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i j$$

個の長方形が存在することになる。それを計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i j &= \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{2} i(i+1) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \left\{ \frac{1}{6} k(k+1)(k+2) \right\} \\ &= \frac{1}{24} (n+1)n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

となった。 (n, n) -階段格子に含まれる長方形の個数が、計算により、

$$\frac{1}{24} (n+1)n(n-1)(n-2) \text{ (個)}$$

とわかった。これはこれで計算好きの人にとっては、ほどよい充実感のある問題であろう。問題 9.5 の答が

$$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2} \text{ (個)}$$

であることを考えると、問題 9.6 の答もきれいな形で表現できるという期待が生れる。そう考えると、すぐに、

$$\frac{1}{24} (n+1)n(n-1)(n-2) = \binom{n+1}{4}$$

であることに気がつくことだろう。はたして、 $\binom{n+1}{4}$ の構造が (n, n) -階段格子に隠れているだろうか、それとも (n, n) -階段格子内の長方形の個数 $\frac{1}{24} (n+1)n(n-1)(n-2)$ がたまたま $\binom{n+1}{4}$ に一致しているのだろうか。

この問題と答を見たとき、私たちは、どうしてもそれが気になった。そして、 (n, n) -階段格子に $\binom{n+1}{4}$ の構造があり、長方形の個数が必然的に $\binom{n+1}{4}$ に一致するということを強く期待し、考えたところ、次のように理解できることがわかった。

まず、

$$\binom{n+1}{4} = \binom{n}{3} + \binom{n}{4}$$

を納得しよう。 $n+1$ 個の中の特別な要素を X とすると、 $n+1$ 個の中から 4 個取る取り出し方の総数 $\binom{n+1}{4}$ は、 X を含む取り出し方の総数 $\binom{n}{3}$ と X を含まない取り出し方の総数

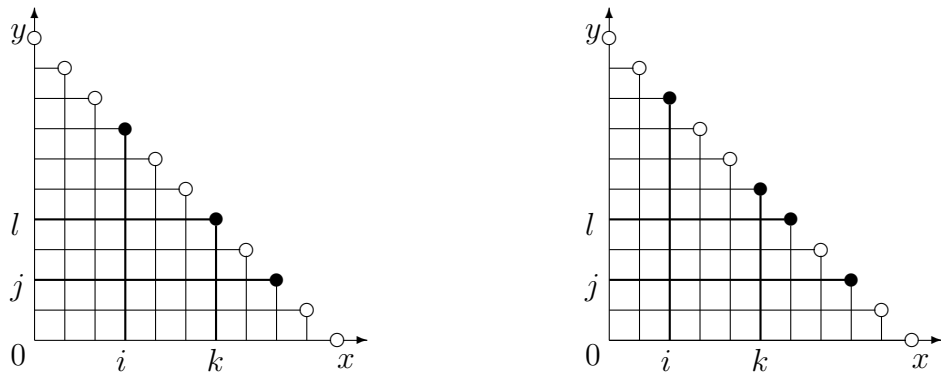


図 9.5: $y = n - 1 - x$ 上の点で表わすと ...

$\binom{n}{4}$ の合計であるからである. 問題 9.6 の答は, (n, n) -階段格子内の任意の長方形は, n 個の中から 3 個と取る取り出し方か, 4 個取る取り出し方のどちらか一方と対応していると考えられないだろうか.

その n 個の対象として, (n, n) -階段格子の点で斜辺 $y = n - 1 - x$ 上にあるものを取ろう. そして, (n, n) -階段格子のある固定された長方形の 2 つの垂直方向の線分を上に向かって延長し, $y = n - 1 - x$ との交点に印をつける. また, 2 つの水平方向の線分を右に向かって延長し, $y = n - 1 - x$ との交点に印をつける. (図 9.5 参照.) そうすると, 右上の点が $y = n - 1 - x$ 上にある長方形からは, $y = n - 1 - x$ 上の 3 点に印がつけられ, 右上の点が $y = n - 1 - x$ 上にない長方形からは, $y = n - 1 - x$ 上の 4 点に印がつけられる. また, どのように 3 点または 4 点を指定しても, 対応する長方形が取れることから, 右上の点が斜辺 $y = n - 1 - x$ 上にある長方形の総数が $\binom{n}{3}$ で, それ以外の長方形の個数が $\binom{n}{4}$ であり, 最終的に, (n, n) -階段格子内の長方形の個数は

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$$

であることがわかった.

さらに, $\binom{n+1}{4}$ を直接理解するために, (n, n) -階段格子の置かれている xy -平面において, $y = n - x$ という直線を考え, $n + 1$ 個の対象としてその直線上の x 座標も y 座標も非負となるようなすべての整数点 $n + 1$ 個を取る. そうすれば, (n, n) -階段格子内の任意の長方形が直線 $y = n - x$ の点を含まないことから, その長方形はその直線上にはすべて 4 点として表現できるではないか. (図 9.6 参照) 考えるべき $n + 1$ 点が (n, n) -階段格子の点でないため, なかなか気づきにくい事実だが, これが $\binom{n+1}{4}$ の謎だったのである. これで, 問題 9.6 の解答に意味を持たせることができた.

この問題を次元に関して一般化できないかどうかを考えてみよう. 例えば, 3 次元では次のようになる.

問題 9.7 (x, y, z) -空間において, $x, y, z \geq 0$ と平面 $x + y + z = n - 1$ に囲まれる立体の中

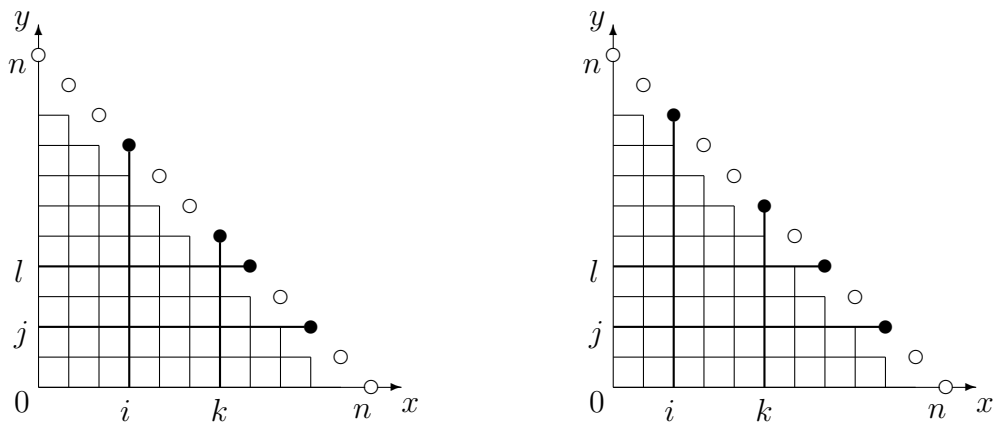


図 9.6: $y = n - x$ 上の点で表わすと...

に, 整数点を頂点とする直方体で, 各面がそれぞれ $x = 0, y = 0, z = 0$ に平行なものの個数はいくつあるか.

この問題を, 上で紹介した方法によって解くことは難しいようである. これから, 紹介する方法はやや視覚性を欠くが, 任意の次元に関し通用する手法である. 簡単のため, 2次元の場合のみを扱う. 容易に一般化できよう. (これは次節で扱うエレガントな解答からヒントを得たものである.)

解答. 原点から, x 軸に沿って, 整数 x_1 だけ進む. その点から, y 軸方向に整数 y_1 だけ進み, その点を p とする. 点 p から x 軸方向に整数 x_2 だけ進み, その点から, y 軸方向に整数 y_2 だけ進んだ点を q とする. すると, p と q を頂点とする長方形がただ1つ決まる (図 9.7 参照). また, どんな長方形にも, このような進み方をただ1つ指定できる.

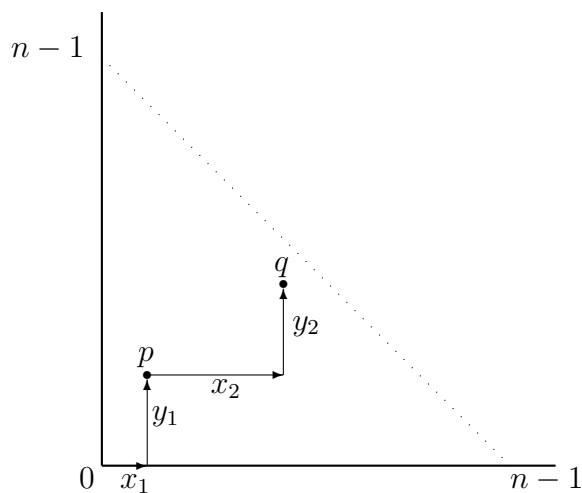


図 9.7: p と q を頂点とする長方形の決定

したがって、長方形の個数は、上のたどり方における整数 x_1, y_1, x_2, y_2 の指定の仕方の総数と一致することがわかる。整数 x_1, y_1, x_2, y_2 の満たすべき条件は、 p は原点と一致してよいので、 $x_1, y_1 \geq 0$ である。また、 p と q で長方形を形成するので、 $x_2, y_2 > 0$ である。最後に、 q は $x, y \geq 0$ と $x + y \leq n - 1$ に囲まれた領域に位置するので、 $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \leq n - 1$ である。ゆえに、

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + y_1 < x_1 + y_1 + x_2 < x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \leq n - 1,$$

すなわち、

$$0 \leq x_1 < x_1 + y_1 + 1 < x_1 + y_1 + x_2 + 1 < x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + 1 \leq n.$$

これを満たす (x_1, y_1, x_2, y_2) の総数は、 $n + 1$ 個の数 $0, 1, \dots, n$ から、4 つの相異なる数を選ぶ選び方の総数だから、 $\binom{n+1}{4}$ となる。■

3次元の場合には、点 p, q だけでなく、 z 軸方向にも高さを決定する点 r を指定しなければならぬ。全く同様に議論すると、直方体の総数は

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq x_1 + y_1 \leq x_1 + y_1 + z_1 < x_1 + y_1 + z_1 + x_2 \\ &< x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 < x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 \leq n - 1 \end{aligned}$$

を満たす $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ の総数と同じである。ゆえに、直方体の個数は $\binom{n+2}{6}$ である。

9.4 数え上げの手法—正四面体の数

すべての辺が n 等分され、図 9.4 のように内部が n^2 個の部分に分割された正三角形 T_n^2 を考える。この問題は、前節で扱ったものによく似ているが、前節のものほどエレガントな解答がないように思われていたが、この問題を数学セミナーの「エレガントな解答を求めむ」に出題したところ、読者より、目の覚めるような解答を受け取った。何らかの構造を持った対象をどのように数え上げるかを考えさせるおもしろい問題であるし、そのエレガントな解答も楽しめるという素晴らしい問題である。

問題 9.8 (i) 各辺の長さが n の三角形を**大きさ n の三角形**という。大きさ n の三角形が図 1 のように、 n^2 個の単位三角形に分割されている。この図形を S_n と表す。このとき、 S_n のなかには、いくつの三角形が含まれているだろうか。(例えば、図 9.4 左の S_3 のなかには、単位三角形が 9 個、大きさ 2 の三角形が 3 個、大きさ 3 の三角形が 1 個存在し、合計で 13 個である。)

(ii) 問題 (i) を三次元に拡張せよ。すなわち、各辺の長さが n の四面体を考え、各辺を n 等分する点を取る。そして、そのそれぞれの点を通る面で、四面体の各面に平行なものをすべて考える。それを T_n とし(図 9.4 右参照)、そのなかの考えた面によって囲まれる四面体の数を求めよ。 T_n のなかには、正四面体だけでなく、八面体も眠っていることに注意せよ。

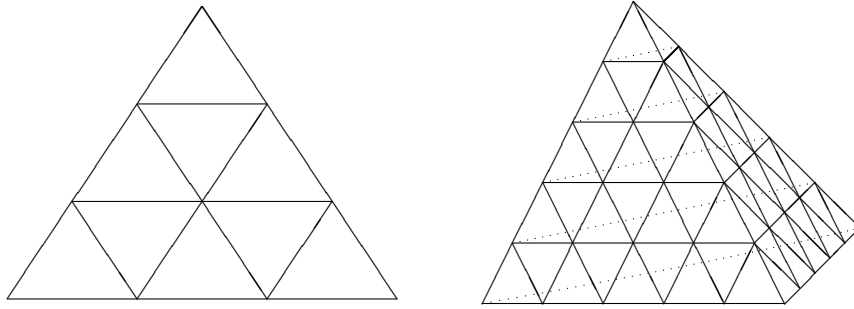


図 9.8: S_3 と T_5

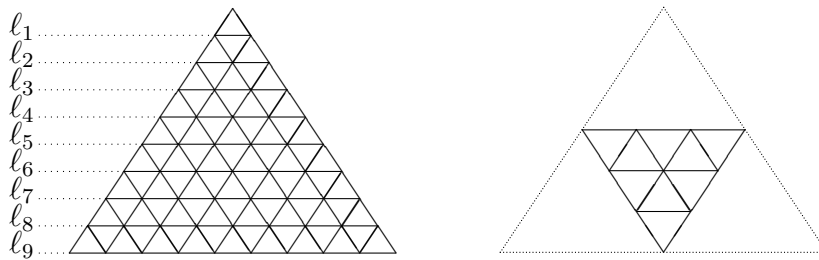


図 9.9: S_9 と下向き三角形

(i) の解答. S_n の上向きの三角形 (S_n と同じ向き) の個数 $\Delta(S_n)$ と下向きの三角形 (S_n と逆向き) の個数 $\nabla(S_n)$ を別々に数えることにする.

まず, $\Delta(S_n)$ について考える. S_n を水平に置き, 水平な直線を下から l_n, \dots, l_2, l_1 と表す. (図 9.9 左参照.) l_j に底辺を持つ大きさ 1 の上向きの三角形は j 個存在するので, 大きさ 1 の上向き三角形の総数は $\sum_{j=1}^n j$ である. また, 大きさ 2 の上向きの三角形で, l_j に底辺を持つものは $j-1$ 個存在するので, その総数は $\sum_{j=1}^{n-1} j$ である. 同様に,

大きさ k の上向きの三角形の総数は $\sum_{j=1}^{n-k+1} j$ である …… (*)

したがって,

$$\Delta(S_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-k+1} j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

次に, 下向き三角形について考える.

主張. 大きさ k の下向き三角形と大きさ $2k$ の上向き三角形とは 1 対 1 に対応する.

主張の証明. 大きさ k の下向き三角形 T を固定すると, 図 9.9 右のように大きさ $2k$ の上向き三角形を対応させることができる. 逆に, 大きさ $2k$ の上向き三角形の内部にはただ 1 つの大きさ k の下向き三角形が含まれる. \square

主張により, 大きさ k の下向き三角形の総数は大きさ $2k$ の上向き三角形の総数と等しく, (*) により, その値は $\sum_{j=1}^{n-2k+1} j$ になる. $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であるから³,

$$\begin{aligned} \nabla(S_n) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{n-2k+1} j \\ &= \begin{cases} \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1) & n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{24}(n+1)(n-1)(2n+3) & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに, S_n に含まれる三角形の総数は

$$\begin{aligned} \Delta(S_n) + \nabla(S_n) &= \begin{cases} \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) & n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1) & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \\ &= \left\lfloor \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) \right\rfloor \dots\dots(\text{答}). \end{aligned}$$

(ii) の解答. 基本的には, (i) の場合と同様に進行する. 大きさ n の四面体 T_n に含まれる上向き四面体の総数 $\Delta(T_n)$ と下向き四面体の総数 $\nabla(T_n)$ を別々に求める.

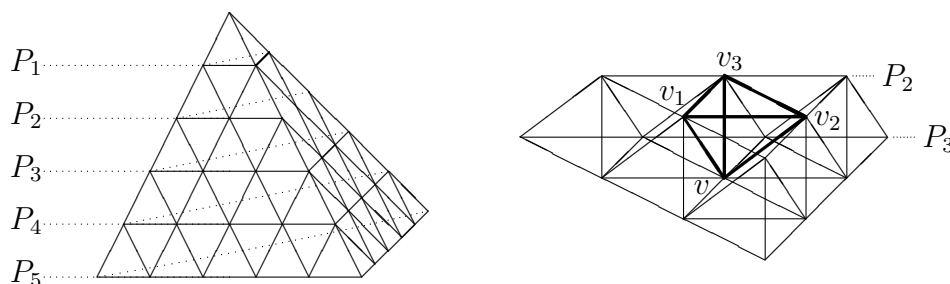


図 9.10: T_5 と下向き四面体 $vv_1v_2v_3$

四面体 T_n を水平に置く. そして, 底面に平行な面を下から順に $P_n, P_{n-1}, \dots, P_2, P_1$ とおく (図 9.10 左参照). このとき, P_j 上に底面を持つ大きさ 1 の上向き四面体の総数は

$$1 + 2 + \dots + j = \frac{1}{2}j(j+1) = \binom{j+1}{2}$$

である. したがって, 大きさ 1 の上向き四面体の総数は $\sum_{j=1}^n \binom{j+1}{2}$ となる. 同様に,

$$\text{大きさ } k \text{ の上向き四面体の総数は } \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{j+1}{2} \text{ である } \dots\dots(**)$$

³ 実数 r に対して, r 以上の最小の整数を $\lceil r \rceil$ と表し, r 以下の最大の整数を $\lfloor r \rfloor$ と表す.

ゆえに,

$$\Delta(T_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{j+1}{2} = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

次に, 下向きの四面体を数える. T_1, T_2, \dots を考えるとき, 最初に下向きの四面体を含むのは T_3 である (図 9.10 右参照). したがって, (i) の証明中の主張のように, T_n に含まれる大きさ k の下向き四面体の総数は, T_n に含まれる大きさ $3k$ の上向き四面体の総数に一致する. ゆえに, (***) より, 大きさ k の下向き四面体の総数は $\sum_{j=1}^{n-3k+1} \binom{j+1}{2}$ であり, 下向き四面体全体の総数 $\nabla(T_n)$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} \nabla(T_n) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{j=1}^{n-3k+1} \binom{j+1}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{72}n(n+1)(n-2)(n+3) & n \equiv 0, 2 \pmod{3} \\ \frac{1}{72}(n-1)(n+2)(n^2+n-4) & n \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

したがって, 求める四面体の総数は

$$\begin{aligned} \Delta(T_n) + \nabla(T_n) &= \begin{cases} \frac{1}{18}n(n+1)^2(n+3) & n \equiv 0, 2 \pmod{3} \\ \frac{1}{18}(n+2)(n^3+3n^2+n+1) & n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \\ &= \left\lceil \frac{1}{18}n(n+1)^2(n+3) \right\rceil \dots\dots (\text{答}). \end{aligned}$$

上で紹介した解答は私が準備したものである. 各三角形や各四面体の重なり織り成す構造を見極め, それを Σ 記号をたくさん用いて, 計算するというものである. この方法を用いた解答者が最も多く, これが最も標準的な解法だと信じる.

以下では, 数セミの読者による素晴らしい解答を述べることにする. 簡単のため (i) の場合だけを扱う.

(i) の解答 (その 2). 大きさ n の $\triangle OAB$ において, 点 O から出発し, \overrightarrow{OA} に沿って x だけ進み, 止まった地点を P_x とおく. そこから \overrightarrow{AB} に沿って y だけ進み, 止まった地点を P_y とおく. さらに, そこから \overrightarrow{BO} に沿って z 進んで止まった地点を P_z とおく. この経路 $OP_xP_yP_z$ が $\triangle OAB$ からはみ出さなかったとき, P_z から \overrightarrow{OA} に平行に伸ばした直線, 直線 P_xP_y と直線 P_yP_z とに囲まれる上向き三角形がただ 1 つ決まる (図 9.11 参照). また, どのような上向き三角形もそのような経路をただ一つ決定するので, このような自然数 x, y, z の選び方だけ, 上向き三角形が存在することになる. そのような x, y, z は $1 \leq z \leq y \leq x \leq n$ を満たさなければならない. この条件を

$$1 \leq z < y + 1 < x + 2 \leq n + 2$$

と書くと, これを満たす x, y, z の組が $\binom{n+2}{3}$ 個存在することがわかる.

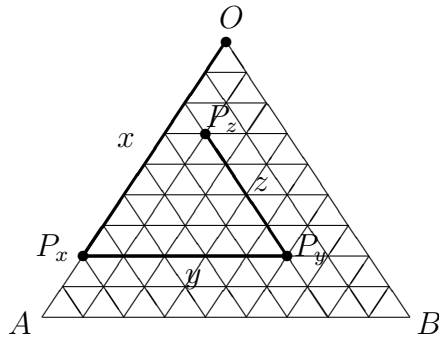


図 9.11: S_9

下向きの三角形については、前の解答の主張で触れたように、大きさ k の下向き三角形の総数は大きさ $2k$ の上向き三角形の総数に一致する。上の x, y, z の選び方において、 z が三角形の大きさを決定しているのので、大きさ $2k$ の上向き三角形の総数は

$$2k < y + 1 < x + 2 \leq n + 2$$

を満たす y, z の選び方の総数 $\binom{n-2k+2}{2}$ と一致する。 $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であるから、下向き三角形の総数は次の式で与えられる:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-2k+2}{2}.$$

したがって、 S_n の三角形の総数は

$$\binom{n+2}{3} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-2k+2}{2} = \left\lfloor \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) \right\rfloor \dots \dots (\text{答}).$$

実は、この問題は、4次元以上でもまったく同じようにして解ける。三角形、四面体を一般化した概念として、 d 次元単体がある。(三角形と四面体は、2次元単体と3次元単体である。) **大きさ n の d 次元単体 S_n^d** とは、各線分の長さが n の d 次元単体 S^d であり、各頂点から整数距離の点を各線分上にすべて取り、それらを通り、 S^d の $(d-1)$ 次元面に平行な $(d-1)$ 次元超平面をすべて考え、その超平面に沿ってナイフを入れた図形である。

定理 1. 自然数 $d \geq 2$ と $n \geq 1$ に対して、大きさ n の d 次元単体 S_n^d に含まれる d 次元単体の総数は次の式で表される:

$$\binom{n+d}{d+1} + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \binom{n+(1-l)d}{d}.$$

最初の項が上向きの d 次元単体の個数を表し、次の項が下向きの d 次元単体の個数を表している。($d = 2, 3$ の場合が問題 (i), (ii) に対応している.) Σ 記号のたくさん入った計算

を行えば、それがきれいに二項係数置き換わり⁴、定理1が導ける。もっとも、解答その2の手法により、定理1は簡単に得られそうです。

最後に、2次元の場合を解決し、3次元の場合を考えると、正八面体がどのように問題を難しくするだろうかと身構えてしまうことと思う。しかしながら、結果的には、定理1が示すように、2次元と3次元はまったく同様に扱えた。考えてみると、3次元におけるどの四面体も、その4つのコーナーに位置する四面体によって決定されていることがわかる。そして、八面体は、どの四面体のなかでも、単位四面体が構成する骨組みの隙間を埋めているに過ぎない。したがって、今回出題した問題(ii)は、大きさ n の四面体のなかの単位四面体全体が作る骨組みのなかから、四面体型に並んだ単位四面体の骨組みを取る方法が何通りあるかを尋ねている問題と全く同じものである。

9.5 (m, n) -町の巡回可能性

道路が碁盤の目状に整備され、縦の道路が m 本と横の道路が n 本が直交している町を考える。このような町を (m, n) -町ということにする(図9.12参照)。この町のすべての交差点には信号が1つずつある。ある交差点から出発し、道路に沿って進み、信号を1つずつ点検して、もとの交差点に戻りたいとする。ただし、次の**巡回規則**を守らなければならない: 交差点に進入したら、必ず信号の点検を行わなければならない、すでに点検済みの信号のある交差点には進入禁止である。

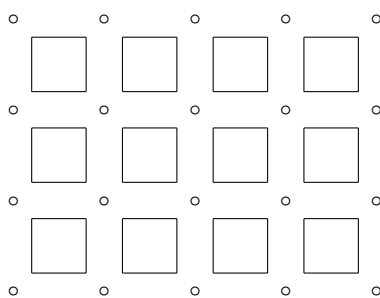


図 9.12: $(5, 4)$ -町

この巡回規則に従って、 (m, n) -町のすべての信号が点検可能であるとき、 (m, n) -町は**巡回可能**であるということにする。次の主張は成り立つだろうか。

主張 9.9 任意の自然数 m, n に対して、 (m, n) -町は巡回可能である。

例えば、図9.13は巡回可能な (m, n) -町を示している。 m, n が大きくなれば、巡回経路の選び方にさらに自由度が出てくる。

⁴ 次の命題を確認せよ:

命題. $n \geq r$ なる自然数 n, r に対して、次の等式が成り立つ: $\sum_{i_{r-1}=1}^{n-r+1} \sum_{i_{r-2}=1}^{i_{r-1}} \cdots \sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} i_1 = \binom{n}{r}$.

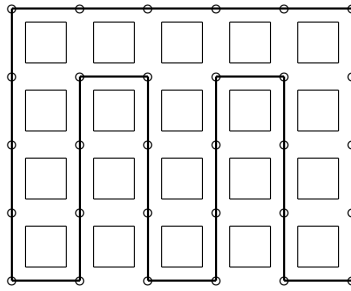


図 9.13: 巡回可能な (m, n) -町

この主張が**真**である (成り立つ) ことを証明するためには, すべての自然数 m, n に対して, (m, n) -町は巡回可能であることを証明しなければならない. しかし, この主張が**偽**である (間違いである) ことを証明するには, (m, n) -町が巡回不可能となる自然数対 (m, n) をたった1つでも見つければよい. この都合の悪い (m, n) -町を主張 9.9 の**反例**という.

主張 9.9 の反例. $m = 1, n \geq 3$ の場合, (m, n) -町は巡回不可能である. ■

巡回規則は後戻りを許さないので, $m = 1$ のとき (または $n = 1$ のとき), (m, n) -町は巡回不可能である. m, n が小さいときのこのような反例は, この問題に本質的な影響を与えそうにないので, あまり気にする必要はないだろう. それを避けるために, 主張を次のように修正する.

主張 9.10 任意の自然数 $m, n \geq 2$ に対して, (m, n) -町は巡回可能である.

主張 9.10 の反例. $(3, 3)$ -町は巡回不可能である. それを証明するため, 巡回路 W が存在すると仮定する. W において, 中央の信号 x の次に訪れる交差点を a とし, x の前に訪れる交差点を b と置く. このとき, a と b はいずれも四隅の交差点でないことに注意しよう. ここで, W から x を除いた部分 W' は a と b を結ぶ経路であり, かつ, $(3, 3)$ -町の外周道路に含まれなければならない. しかしながら, a と b がどこに位置しようとも, そのような W' を取ることができない. したがって, $(3, 3)$ -町は巡回不可能である. ■

さて, 主張 9.10 を予想したが, またまた, 反例が見つかってしまった. 主張 9.9 の反例はあっても気にならないものだったが, 今度の主張には注意が必要である. 与えられた問題から数学的構造やメカニズムを抽出するまでは, 思考を停止してしまうのは残念である. この反例を避けるため, さしあたって, どのような条件を付ければ, 真の主張を構築できるだろうか.

とりあえず, m, n のどちらかが偶数のとき, 図 9.13 のような巡回路が考えられるので,

$$m \text{ または } n \text{ が偶数} \Rightarrow \text{巡回可能} \dots (*)$$

であることがわかる.

では、 m と n のどちらも奇数のときはどうなるだろうか. 少なくとも、 $m = n = 3$ のとき、巡回不可能であった. $(3, 3)$ -町の場合、中心の交差点に着目するという局所的な議論により、巡回不可能であることを証明したが、大きい m, n に対して、 $(3, 3)$ -町と同様の議論を行うことは難しそうである. とりあえず、 $(5, 7)$ -町や $(7, 7)$ -町について考えてみると、どうやら巡回不可能と思われる. 大きい奇数 m, n に対して、 (m, n) -町が巡回不可能となるような大局的な「うまくいかない仕組み」を発見することができないものだろうか.

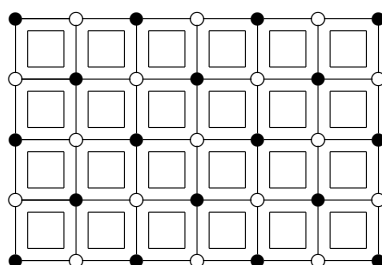


図 9.14: 信号の色付け

ここで、図 9.14 のように、同色が線で結ばれないように、信号を全体を黒と白に塗り分けてみよう. このような構造を付加して考え直してみると、巡回路は黒色と白色の交差点を交互に訪問しなければならないので、次のことがわかる:

巡回可能ならば、白い交差点と黒い交差点の個数が一致している ... (**)

しかし、 m と n の両方が奇数のとき、 $m \times n$ も奇数になってしまい、(**) が成り立たない. したがって、

m, n の両方が奇数 \Rightarrow 巡回不可能 ... (***)

が成り立つ. ゆえに、3 以上のすべての奇数 m, n に対して、 (m, n) -町が主張 9.10 の反例になることがわかった.

そして、(*) と (***) により、主張 9.9 から始まった巡回可能性の問題は、次のような定理に昇格し、決着した.

定理 9.11 $m, n \geq 2$ なる自然数 m, n に対して、 (m, n) -町が巡回可能であるための必要十分条件は、 m または n が偶数であることである.

これがさらに一般化できるかどうか考えてみよう. これまで扱ってきた (m, n) -町は、横に $m - 1$ 個の正方形を並べ、それを $n - 1$ 個縦に積んで作った長方形と見ることができる. そして、 (m, n) -町の巡回可能性とは、その長方形において、正方形の頂点に対応する点 (**頂点**という) 全体を、正方形の縁に対応する線 (**辺**という) に沿って、ちょうど 1 回ずつ通つてもとの点に戻るかという問題であった. そう思うと、そのような長方形の一般化として、方眼紙上にいくつかの単位正方形を並べて作った連結な図形 S を考えることができる. それを **積み木図形** と呼ぶことにしよう. このとき、積み木図形 S の辺をたどり、すべての頂

点をちょうど1回ずつ通ってもとの位置に戻ることは可能だろうか. それが可能であるとき, 積み木図形 S は**巡回可能**であるということにする.

積み木図形 S の頂点全体は平面上の格子点の部分集合と考えることができる. 平面上の格子点全体は, すべての隣接する2頂点が同色にならないように白と黒で塗り分けることができるので, S が巡回可能ならば, S の白頂点と黒頂点の個数が等しい必要がある.

S が巡回可能であるための必要条件がもう1つある. 連結な積み木図形 S の頂点 v が**切断点**であるとは, S から v を取り除くと, 到達不可能な2頂点が生じることである (図 9.15 参照). 積み木図形 S が切断点 v を持つと, ある2頂点 x, y で, それらを結ぶすべての経路は必ず v を通過するものが存在する. このとき, x から y に進むことができても, その戻り道に v を通過することなく y から x まで到達することができない. したがって, S が巡回可能なら, S は切断点を持たないことがわかる.

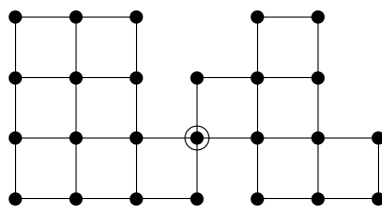


図 9.15: 切断点を持つ積み木図形

次の主張は成り立つだろうか.

主張 9.12 積み木図形 S が巡回可能であるための必要十分条件は, S が切断点を持たず, かつ, S の白頂点と黒頂点の個数が等しいことである.

当然, 必要性は成り立つので, 問題は十分性が成り立つかどうかということになる.

主張 9.12 の十分性の反例. 図 5 に与えられた積み木図形 T は条件を満たすが, 巡回可能ではない. もし可能ならば, x から y への経路で, x から y を取り除いたときの左側のすべての頂点を巡回するものが存在するはずである. このとき, (3,3)-町は巡回可能になってしまい, 主張 9.10 の反例での考察に矛盾する. よって, T は巡回不可能である. ■

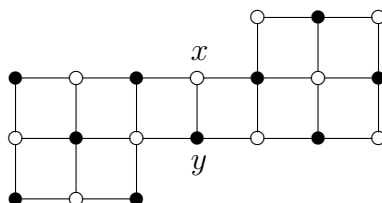


図 9.16: 巡回不可能な町

この反例はこれまで見つけてきた反例とは少々タイプが異なる。なぜなら、さしあたってこれを避けるために、どのような条件を加えればいいかがわからないからだ。これは何を示唆しているのだろうか。図 9.16 の積み木図形が巡回不可能なことを示すためには、第 3 章で触れたタフネスという概念が有効であるが、そのタフネスをもってしても、巡回可能性の解決には至らない。積み木図形が巡回可能であるための必要十分条件は、まだ正解がわからない未解決問題である。

9.6 木の隔たり

次の問題は偶奇性の議論が鍵となるものである。当初、この形で出題されたので、その形の問題に対して解答を与えたが、よく考えれば、木の性質に着目するより、木の 2 部グラフ性に着目した方が問題を簡単に解くことができることがわかる。さらに、すべての 2 部グラフが次の問題の性質を満たすことも証明できる。それを考えながら問題の解答を追って欲しい。

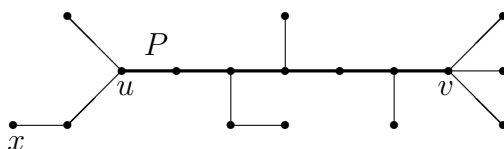
問題 9.13 木の 2 つの頂点 x, y を結ぶ道の長さを x, y の距離という。ある固定された頂点 p と他のすべての頂点 x について、 x と p の距離の和を p の隔たりということにする。隔たりが 1 だけ違っている 2 つの頂点を持つ木は、奇数個の頂点を持つことを示せ。

解答. 今考える木を T とおく。 T の 2 頂点 x, y の距離を $d(x, y)$ とおき、頂点 x の隔たりを $H(x)$ とおく。(すなわち、 $H(x) = \sum_{v \in V(T)} d(x, v)$ である。) まず、次の主張を証明する：

主張. u, v を T の任意の 2 頂点とする。 u, v の距離が a のとき、任意の頂点 x に対して、 $|d(x, u) - d(x, v)|$ と a の偶奇性は等しい。

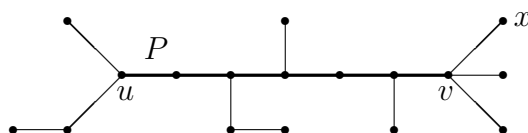
主張の証明. u と v を結ぶ道を P とする。(P の u, v 以外の点を P の内点という。) x と $\{u, v\}$ の関係は次のいずれかである。木において、任意の 2 頂点を結ぶ道は 1 つしか存在しないことに注意せよ。

(i) x から u までの道が P の内点と交わらない場合 ($x = u$ かもしれない)。



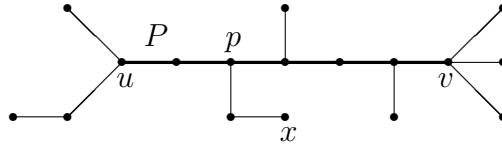
$d(x, u) = m \geq 0$ とすると、 $d(x, v) = m + a$ である。したがって、 $|d(x, u) - d(x, v)| = a$ であり、主張が成り立つ。

(ii) x から v までの道が P の内点と交わらない場合 ($x = v$ かもしれない)。



(i) と本質的に同じ議論で証明できる.

(iii) x から u までの道が P の内点と交わる場合 (このとき, x から v までの道も P の内点と交わる).



x から u に至る道上で最初に訪れた P 上の内点を p とおき, $d(x, p) = l$, $d(u, p) = n$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} |d(x, u) - d(x, v)| &= |(l + n) - (l + (a - n))| \\ &= |-a + 2n| = |a - 2n|. \end{aligned}$$

$2n$ は偶数なので, a と $|a - 2n|$ の偶奇性は等しい.

よって, 主張が示された. \square

さて, 解答に入る. p, q を $H(p) - H(q) = 1$ なる T の頂点とする. $H(p) - H(q)$ は次のように計算できる:

$$\begin{aligned} H(p) - H(q) &= \sum_{v \in V(T)} d(v, p) - \sum_{v \in V(T)} d(v, q) \\ &= \sum_{v \in V(T)} (d(v, p) - d(v, q)) = 1. \end{aligned}$$

$d(p, q)$ が偶数のとき. 主張より, 任意の頂点 v に対して, $d(v, p) - d(v, q)$ は偶数であるから, 上の \sum の中で偶数のみが足されることになるので, $H(p) - H(q)$ は (T の頂点数によらず) 偶数になってしまう. これは, $H(p) - H(q) = 1$ に矛盾する. したがって, この場合は起こらない.

$d(p, q)$ が奇数のとき. 主張より, 任意の頂点 v に対して, $d(v, p) - d(v, q)$ は奇数である. もし, T の頂点数が偶数ならば, \sum の中で奇数が偶数回, 加えられているので, $H(p) - H(q)$ も偶数である. これは, $H(p) - H(q) = 1$ に矛盾する. したがって, T の頂点数は奇数である. \blacksquare

上の証明を追ってみると, 次の事実を証明していることがわかる.

定理 9.14 木 T において, p, q を 2 頂点とする. p と q の隔たりの差が奇数であるための必要十分条件は, T の頂点数が奇数であり, かつ, T での p, q の距離が奇数であることである. \square

さて, この問題のおもしろいのは, 頂点数が奇数の任意の木に, 隔たりの差がちょうど 1 になる 2 頂点が必ずしも存在しないことである. したがって, 木の頂点数の偶奇性と隔た

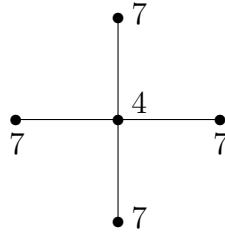


図 9.17: 隔たりがちょうど2の頂点对を持たない木

り1の頂点对の存在は同値ではない. 図9.17のグラフは5頂点の木で隔たりの差がちょうど1の2頂点は存在しない. (頂点に添えた数は各点の隔たりである.) 隔たりがちょうど1となる木の特徴付けという問題も面白いのではないだろうか.

さらに, 問題9.13において, グラフが木であるという事実をどれくらい使ったであろうか. 主張を満たすために, グラフが木であることを使ったようである. しかし, 実際は, グラフが2部グラフであれば十分である.

定理 9.15 2部グラフ G において, 2頂点 p, q の隔たりの差が奇数であるための必要十分条件は, G の頂点数が奇数であり, かつ, p, q の距離が奇数であることである.

証明. G の頂点は同色が隣接しないように, 白と黒に塗られているとする. このとき, どの白頂点と黒頂点の距離も奇数であり, どの同色の2頂点の距離も偶数である. したがって, 同色の頂点 p, q から, 任意の頂点 x に対して, $|d(x, p) - d(x, q)|$ は偶数であり, 色の異なる p, q から, 任意の頂点 x に対して, $|d(x, p) - d(x, q)|$ は奇数である.

p, q の隔たりの差とは,

$$\sum_{v \in V(G)} d(p, v) - \sum_{v \in V(G)} d(q, v) = \sum_{v \in V(G)} (d(p, v) - d(q, v))$$

であるから, p, q の隔たりが奇数であるための必要十分条件は, G の頂点数が奇数であり, かつ, p, q の距離が奇数であることである. ■

偶奇性が鍵となる簡単な問題をもう1つ紹介する.

問題 9.16 任意の自然数 n に対して, n の約数が (1 とそれ自身を含めて) 奇数個であるための必要十分条件は, \sqrt{n} が整数であることである.

解答 (その1). 自然数 d が n の約数のとき, $m = \frac{n}{d}$ も n の約数である. したがって, n の任意の約数 d に対して, n の約数 $m = \frac{n}{d}$ を対応させることができる. ゆえに, \sqrt{n} が整数でなければ, n の約数全体をそのような2つずつの組に分割することができ, 約数の総数は偶数になる. また, \sqrt{n} が整数なら, $d = \frac{n}{d}$ となる約数 d を含むことになり, それ以外のすべての約数全体を上のような2つずつの組に分けられることから, n の約数の総数は奇数になる. ■

解答 (その 2). $n = p_1^{s_1} p_1^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ を n の素因数分解とする. このとき, 約数の総数は $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdots (s_k + 1)$ である. n の約数の総数が奇数であるとき, s_1, s_2, \dots, s_k はすべて偶数になり,

$$\sqrt{n} = p_1^{\frac{s_1}{2}} p_1^{\frac{s_2}{2}} \cdots p_k^{\frac{s_k}{2}}$$

は整数となる. 逆も, 同様に示される. ■

数セミの中に面白い問題を見つけたので, それを紹介したい. 本質的に偶奇性の議論が鍵となっていたが, 証明は数学的帰納法が用いられている.

問題 9.17 k を自然数とする. $2^k + 1$ 個以上の相異なる整数が与えられたとき, その中から, 次を満たす $k + 2$ 個の整数からなる集合 A をとることができることを証明せよ: $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in A$ に対して,

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_m,$$

$$x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_m$$

ならば, 任意の i ($1 \leq i \leq m$) に対して, $x_i = y_i$ である.

解答. 自然数 k についての数学的帰納法を用いる. $k = 1$ のとき, 3 つ以上の整数から 3 つの整数を選び, A とおく. この A は問題の要求を満たしている. 例えば, A から x_1, x_2 と y_1, y_2 を選び, $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ が成り立っているとす. 結論を否定し, $x_1 < y_1$ であるとすると, $y_1 < x_1 < x_2 < y_2$ であり, $|A| = 3$ に反する.

$k \geq 2$ とする. 相異なる整数 a_0, \dots, a_{2^k} に対し, 0 でない有理数 c と有理数 d を選んで, $b_i = ca_i + d$ とおく (ただし, $0 \leq i \leq 2^k$ とする). もし, b_0, \dots, b_{2^k} が題意を満たせば, a_0, \dots, a_{2^k} もそうである.

まず, うまく c と d を選んで, b_0, \dots, b_{2^k} の中から, $2^{k-1} + 1$ 個以上が偶数で, 奇数が 1 つ以上含まれるようにできる. $b_0, \dots, b_{2^{k-1}}$ が偶数であり, $b = b_{2^k}$ が奇数であるとする. 帰納法の仮定により, $b_0, \dots, b_{2^{k-1}}$ に対して, 題意を満たす $k + 1$ 個の整数からなる集合 B が取れる. ここで, $A = B \cup \{b\}$ とする. そして, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in A$ を勝手に選ぶ. $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_m$ であり, b のみが奇数だから, b が右辺と左辺とのどちらか一方のみに含まれることはない. $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_m$ が偶数ならば, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in B$ であり, 帰納法の仮定より, 題意が満たされる. $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_m$ が奇数ならば, 右辺にも左辺にも b がちょうど 1 回ずつ含まれ, 両辺から b を引くことにより, 両辺が偶数の場合に帰着できる. ゆえに, 題意が成り立つ. ■

偶奇性に頼るための数の変換が非常に巧妙である. この解答は帰納法によっているが, 鳩の巣原理などによる巧妙な解法はないものだろうか.

9.7 白と黒の問題

完全マッチングやハミルトン閉路を探す問題で、隣接するどの2頂点も異なる色を持つように、頂点全体を白と黒に塗った。すなわち、与えられたグラフが2部グラフであることを根拠に、完全マッチングやハミルトン閉路の非存在性を結論したのである。

この節では、そのような問題を考える。これまでに扱った問題は全体が2部グラフ的であることが前提となっていたが、そうでない問題も扱う。それらは非常に巧妙である。

まず、第4.1節の冒頭の問題と第9.4節の定理9.11の問題を思い出そう。以下の問題も、基本的には同じ方針で解答できるが、偶奇性の議論の要素も含まれている。

問題 9.18 10×10 のマス目を $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ 型のタイルで、敷き詰めることが可能か。

解答. 10×10 のマス目を白と黒で市松模様塗る。各タイルは、白マス3個と黒マス1個を覆うか、または、黒マス1個と白マス3個を覆う。前者のタイプ a 枚と後者のタイプ b 枚で、 10×10 のマス目が敷き詰められたとする。 10×10 のマス目において、白の目と黒の目は等しいので、 $3a + b = a + 3b$ であり、 $a = b$ が得られる。したがって、タイルの総数は偶数でなければならない。しかしながら、タイルの総数は $100 \div 4 = 25$ である。よって、矛盾である。■

問題 9.19 k を自然数とする。 $(4k + 2) \times (4k + 2)$ のマス目を 1×4 のタイルで敷き詰められるか。

この問題を最初に見たとき、「市松模様塗って、白マスと黒マスの個数に関して、何か矛盾を探せばいいんだな」と思うことでしょう。 1×4 のマス目は黒と白を2つずつ覆うので、全体としては白マスも黒マスも偶数個必要である。 $(4k + 2) \times (4k + 2)$ のマス目において、白マスと黒マスの個数は等しく、ともに、 $2(k + 1)^2$ 個であるから、この時点では矛盾得られない。

解答. 2×2 の4個からなるマスを1つの単位として、白と黒に塗ってみよう。(図9.19参照)すると、 2×2 のかたまりが $(2k + 1) \times (2k + 1)$ 個になり、白のかたまりと黒のかたまりの個数が異なる。したがって、白マスと黒マスの個数も異なる。しかしながら、 1×4 のタイルは、どこに置いても白と黒のマスを2つずつ覆うことがわかる。そして、全体を敷き詰めるためには、白マスと黒マスの個数は等しくなければならない。

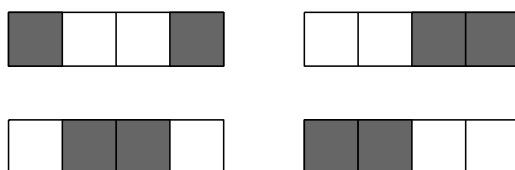


図 9.18: 1×4 のタイルの塗られ方のパターン

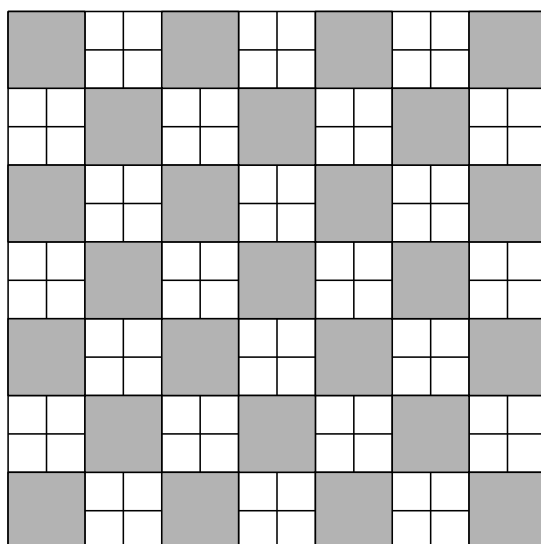


図 9.19: 2×2 を単位とした塗り方

ゆえに, $(4k + 2) \times (4k + 2)$ のマス目は 1×4 のタイルでは敷き詰められないことになる. ■

素晴らしい工夫である. 普通に市松模様塗りにしてもうまくいかないけど, 2×2 を単位とした市松模様を考えることにより, 問題が解けるというわけである. このような塗り方をしても, 1×4 の各タイルは白マス 2 個と黒マス 2 個を覆うという事実に, なかり意表をつかれた.

では, 似た問題をもう 1 つ.

問題 9.20 n と m を自然数とする. $n \times m$ のマス目が 1×4 のタイルと 2×2 のタイルを使って敷き詰められた. 敷き詰めたタイルをすべて取り外したところ, 1×4 のタイルの 1 個を紛失してしまった. そこで, 2×2 のタイルを 1 つ増やして, $n \times m$ のマス目を再び敷き詰めようと思う. これは可能だろうか.

「どうしても敷き詰められないこと」を証明するという方針で解答に挑むことにする. 1×4 のタイルも 2×2 のタイルもちょうど 4 つのマスを覆うので, マス目の個数からの矛盾は得られない.

とりあえず, 市松模様塗りにしてみよう. 1×4 のタイルも 2×2 のタイルも, 白と黒のマスを 2 つずつ覆うので, ここからも矛盾は出てこない.

さらに, 2×2 を 1 単位として, 市松模様塗りにしてみよう. 1×4 のタイルは白マスと黒マスを 2 つずつ覆うが, 2×2 のタイルは置き方によって, 覆う白マスと黒マスの個数が違ってくる. これではうまくいかない.

何とか, 各タイルの置き方に依存しない方法で, かつ, 1×4 のタイルと 2×2 のタイルとの違いが明らかになるようなうまい工夫はないものだろうか.

解答. 図 9.21 のように塗ってみよう. まず, 1×4 のタイルは黒のマスをいつでも 0 個か 2 個覆う. しかしながら, 2×2 のタイルはどこに置いても, ちょうど 1 つの黒マスを覆う. (図 9.20 参照.) これにより, $m \times n$ のマス目が 1×4 のタイルと 2×2 のタイルにより敷き詰められるならば, $n \times m$ のなかの黒マスの総数と 2×2 のタイルの個数の偶奇性は等しいという結論が得られる.

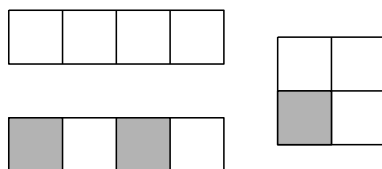


図 9.20: 1×4 と 2×2 のタイルの塗られ方のパターン

したがって, 1×4 のタイルを 2×2 のタイルで置き換えると, 2×2 のタイルの個数の偶奇性が変わるので, 問題 2 の答えは「不可能」ということになる. ■

ちなみに, この問題では, n, m という数を全く使っていない. だから, 問題 2 で扱う図形は 1×4 のタイルと 2×2 のタイルで敷き詰められるものなら何だってよいことになる.

さらに, 図 9.21 の塗り方によって, 問題 1 にも答えられることに注意しよう: $(4k+2) \times (4k+2)$ のマス目を図 9.21 のように塗ると, 黒マスの個数は $(2k+1)^2$ であり, 奇数である. しかしながら, 1×4 のタイルは黒マスをいつでも偶数個覆うので, 問題 1 の答えとして「不可能」という結論が得られる.

図 9.21 の塗り方は問題 1, 2 の両方に有効な塗り方であったわけだが, 図 9.19 の塗り方のみでうまく解ける問題を作ることができるだろうか.

さらに, もう 1 つの問題を考える.

問題 9.21 10×10 のマス目を $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ 型のタイルで, 敷き詰めることが可能か.

解答. 次の図 9.23 のようにマス目全体を白と黒に塗り, L 字型のタイルがどのように置かれるかを考えてみる.

すると, L 字型タイルをどこにおいても白と黒が 1 マスと 3 マスずつ塗られることがわかる. (図??参照.) したがって, 問題 9.18 と全く同様の解答が得られる. つまり, 10×10 のマス目を L 字型で敷き詰めることはできない. ■

白・黒を塗って解答する問題には, 実に豊かなバリエーションがあるものである.

次に, 3 色で塗る問題を考えよう.

$8 \times 8 - 1$ マス目が 1×3 のタイルで敷き詰められるか. どこを抜けばいいか?

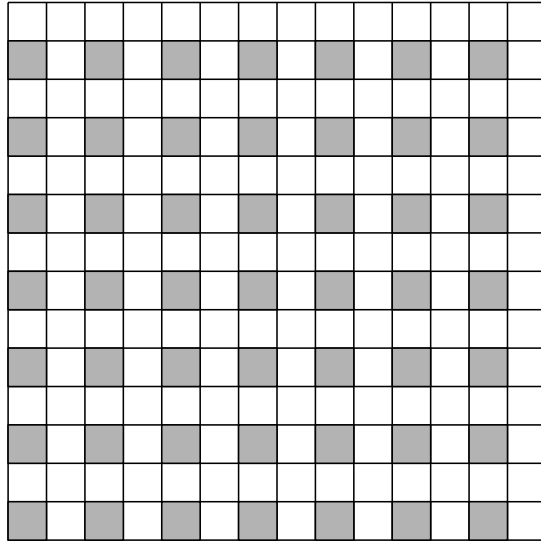


図 9.21: 2×2 の左下を黒で塗る塗り方

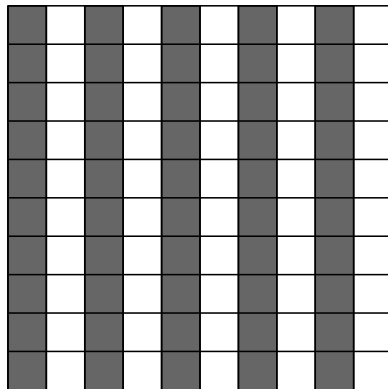


図 9.22: 1列ずつ塗る塗り方

9.8 鳩の巣原理

問題 9.22 1 から 1000 までの自然数を考える. 互いに割り切らない 500 個の数を選べ. また, どのように 501 個以上選んでも, 一方がもう一方を割りきる数の対が含まれてしまうことを証明せよ.

この問題は, 解答がわかってしまえば, 直ちに次のより一般的な問題にも答えることができる.

問題 9.23 1 から $2N$ までの自然数を考える (ただし, $N \geq 1$).

- (i) どの相異なる 2 数 i, j も i が j を割りきらないように, N 個の数を選べ.



図 9.23: 1 列ずつ塗る塗り方

(ii) どのように $N + 1$ 個以上の数を選んでも,

$$i \text{ が } j \text{ を割りきるような相異なる 2 数 } i, j \text{ が存在する} \quad \dots\dots\dots (*)$$

ことを証明せよ.

(i) の解答. $N + 1, N + 2, \dots, 2N$ (1 つの例として). ■

(ii) の解答 1. $A = \{1, 2, \dots, 2N\}$ とおき, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ について, 集合 $A_k \subset A$ を次のように定める:

$$A_k = \{2^m(2k + 1) \in A : m = 0, 1, 2, \dots\}.$$

素因数分解の一意性より, 任意の自然数 x は非負整数 m, k により,

$$x = 2^m(2k + 1)$$

と一意的に表すことができるので, $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{N-1} = A$ であり, 相異なる s, t について, $A_s \cap A_t = \emptyset$ である. さて, A から $N + 1$ 個以上の数を選べば, “鳩の巣原理”により, ある A_k からは 2 つ以上の数 $i, j (i < j)$ が選ばれている. A_k の定義より, i と j は $i = 2^m(2k + 1), j = 2^{m'}(2k + 1)$ と表せる (ただし, m, m' は $m < m'$ なる非負整数である). このとき,

$$\frac{j}{i} = \frac{2^{m'}(2k + 1)}{2^m(2k + 1)} = 2^{m'-m} \geq 2$$

となり i は j を割りきる. ■

(ii) の解答 1'. $A = \{1, 2, \dots, 2N\}$ とする. X を, $1, 2, \dots, 2N$ の中の互いに割りきらない $N + 1$ 個の数からなる集合で, その中の $N + 1$ 個の数の和が最大になるものとする. x_0 を X の最小数とすると, $|X| \geq N + 1$ だから, $x_0 \leq N$ である. したがって, $2x_0 \in A$ である. 今, X から x_0 を取り除き, $2x_0$ を付け加えて得られる集合 $X' = (X - \{x_0\}) \cup \{2x_0\}$ を考える. (X は x_0 の倍数を含んでいないことに注意せよ.) また, x_0 の最小性より, 任意の整数 $k \geq 3$ に対して, $2x_0 = kx_i$ となる $x_i \in X$ は存在しない. したがって, X' のどの相異なる 2 数 i, j についても, i が j を割りきらない. 明らかに, $\sum_{x \in X} x < \sum_{x \in X'} x$ であり, X の最大性に反する. したがって, 上のような X を選ぶことはできない. ■

この方針は解答 1 において, 各集合 A_k の最大数に帰着する方法である. 一方, これとは逆に各 A_k の最小数 (これは必ず奇数) に着目する次のような方法もある: 互いに割りきら

ない $N + 1$ 個の数の中に偶数があれば 2 で割り、奇数になるまでそれを続ける。この操作により、同じ数は現れない (もし、同じ数が現れるなら、もともとその 2 数は一方がもう一方を 2 のべきで割りきっている)。だから、この操作に関して飽和した状態では、 $N + 1$ 個の相異なる奇数が得られているはずである。しかしながら、 $1, 2, \dots, 2N$ の中の奇数はちょうど N 個しかないので、矛盾である。

これまで述べてきた証明は本質的に 2 のべきに着目して解答されている。次に、数学的帰納法による証明を紹介する。

(ii) の解答 2. N についての数学的帰納法を用いる。最初に、 $N = 1$ のとき、1 から 2 までの自然数から 2 数をとると、 $\{1, 2\}$ という取り方しかなく、1 は 2 を割り切る。したがって、 $N = 1$ のとき、(*) は成り立つ。

今、 $1, 2, \dots, 2N$ からどのように $N + 1$ 個の数を選んでも、(*) が成り立つことを仮定し、1 から $2(N + 1)$ までの数を考える。この中から $N + 2$ 個の数を任意に選び、その集合を B とする。もし、 B が $2N + 1$ と $2N + 2$ の両方を含まないなら、 B は 1 から $2N$ までの数を $N + 1$ 個以上含むから、帰納法の仮定より、(*) は成立する。したがって、 B は $2N + 1$ と $2N + 2$ の両方を含むとする。このとき、 $1, 2, \dots, 2N$ の中からは互いに割りきることのない N 個の数選ばれているが、その中には必ず $N + 1$ かその約数を含んでいる。(1 から $2N$ の中に $N + 1$ の倍数はないことに注意せよ。) そうでなければ、選ばれた N 個の数に $N + 1$ を付け加えて、(*) を満たさない $N + 1$ 個の数を選べる。これは、帰納法の仮定に矛盾する。したがって、 $N + 1$ かその約数が $2N + 2$ を割りきり、(*) が成り立つ。■

問題 (i) において、1 から 1000 までの数の中の 500 個の数の選び方の総数について考える。(ii) の解答 1 の方針に従うと、 $A = A_0 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{499}$ から N 個の互いに割りきらない数を選ぶと思うと、各 A_k からちょうど 1 つの数を選ぶ必要があることがわかる。 $k = 250, 251, \dots, 499$ について、集合 A_k はただ 1 つの要素からなっているので、 $501, 503, \dots, 999$ は必ず選ばれる。(下表参照。) したがって、これらの約数 (必ず奇数) はすべて選ぶことはできない。また、それらの奇数が選べないという理由により、必ず選ばれてしまう偶数が少し確認できるくらいである。

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\} \\
 A_1 &= \{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768\} \\
 A_2 &= \{5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640\} \\
 A_3 &= \{7, 14, 28, 56, 112, 224, 448, 896\} \\
 A_4 &= \{9, 18, 36, 72, 144, 288, 576\} \\
 &\vdots \\
 A_{249} &= \{499, 998\} \\
 A_{250} &= \{501\} \\
 &\vdots \\
 A_{499} &= \{999\}
 \end{aligned}$$

すぐにわかるのはこの程度であり、実際にこの選び方の総数を正確に決定しようとすると、かなり大変な場合分けが待っていそうである。

鳩の巣原理によるエレガントな解答を持つ問題をもう少し紹介する.

問題 9.24 相異なる 7 つの整数を考える. この中には, その和か差が 10 の倍数になる 2 数が存在することを証明せよ.

解答. 整数全体 \mathbf{Z} を次の集合に分割する:

$$\begin{aligned}A_0 &= \{x \in \mathbf{Z} : x = 10m, \exists m \in \mathbf{Z}\} \\A_1 &= \{x \in \mathbf{Z} : x = 10m \pm 1, \exists m \in \mathbf{Z}\} \\A_2 &= \{x \in \mathbf{Z} : x = 10m \pm 2, \exists m \in \mathbf{Z}\} \\A_3 &= \{x \in \mathbf{Z} : x = 10m \pm 3, \exists m \in \mathbf{Z}\} \\A_4 &= \{x \in \mathbf{Z} : x = 10m \pm 4, \exists m \in \mathbf{Z}\} \\A_5 &= \{x \in \mathbf{Z} : x = 10m + 5, \exists m \in \mathbf{Z}\}\end{aligned}$$

鳩の巣原理により, 相異なる 7 つの整数を選ぶと, 同一の A_i から 2 つ以上の整数が選ばれる. 同一の A_i に属す任意の 2 数の和か差は 10 の倍数になるので, 題意が成り立つ. ■

問題 9.25 n 個の自然数 a_1, \dots, a_n を考える. (必ずしも, すべてが異なる必要はない.) このとき, ある連続した $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}$ について, その和 $\sum_{i=k}^{k+l} a_i$ が n の倍数となることを証明せよ.

解答. 集合 $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$ と集合 $R = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ を考える. そして, それぞれの $m \in N$ に対して, m を n で割った余りを $f(m)$ とおく. 写像 $f : N \rightarrow R$ において, $n+1 = |N| > |R| = n$ だから, $f(m) = f(m')$ となる相異なる数 $m, m' \in N$ が存在する. したがって, $m = a_1 + \dots + a_p$, $m' = a_1 + \dots + a_q$ とすると (ただし, $p > q$ と仮定する),

$$m - m' = (a_1 + \dots + a_p) - (a_1 + \dots + a_q) = a_{q+1} + \dots + a_p$$

となる. ■

問題 9.26 円周上に 1 から 10 までの数をランダムに並べる. このとき, 円周上で隣り合う 3 数で和が 17 以上になるものが存在することを証明せよ.

解答. 円周上で隣り合う 3 数の合計をすべて足し合わせよ. このとき, 1 から 10 までのそれぞれの数はちょうど 3 回ずつ足されるので, その合計は $55 \times 3 = 165$ である. 円周上で隣り合うどの 3 数の和も 16 以下なら, その和は $160 \times 10 = 160$ 以下になってしまう. したがって, 題意が成り立つ. ■

次は少々泥臭い議論が必要な問題である.

問題 9.27 和が 20 になる 8 個の自然数の集合には, 和が 4 になる部分集合が含まれることを証明せよ.

解答. $\frac{20}{8} = \frac{5}{2} < 3$ であるから、和が20である8個の自然数の中には、2以下の自然数が必ず含まれる。

(i) 2が含まれる場合. 和が18になる7個の自然数の中には、 $\frac{18}{7} < 3$ であるから、再び、2以下の自然数が含まれる。2が含まれているば、証明が終わるので、1が含まれたとする。このとき、和が17になる6個の自然数の中には、 $\frac{17}{6} < 3$ であるから、2以下の数が含まれる。いずれの場合も、和が4になる自然数の集合をとることができる。

(ii) 2が含まれない場合. 和が17になる7個の数の中には、 $\frac{17}{7} < 3$ だから、(2が含まれないので)1が含まれる。和が16になる6個の数の中には、 $\frac{16}{6} < 3$ だから、1が含まれ、和が15になる5個の数の中には、 $\frac{15}{5} \leq 3$ だから、1か3が含まれる。どちらの場合も、和が4になる自然数の集合をとることができる。■

次は、少々難解な問題であると思う。見た感じでは、鳩の巣原理が解法の鍵となる雰囲気はあるのだが、実際に、その構造を見つけるのは至難の技であろう。

問題 9.28 相異なる $n^2 + 1$ 個の数からなる任意の数列は、 $n + 1$ 個の数からなる増加列か減少列を含むことを証明せよ。

例えば、 $1, 2, \dots, 10$ を勝手に並べてみよう。問題は、その中に長さ4の増加列、もしくは、長さ4の減少列が含まれるということを主張している。例えば、

$$(2, 5, 1, 9, 6, 3, 8, 4, 7, 10)$$

には、 $(1, 3, 4, 7)$ という増加列が含まれている。さらに、

$$(1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9)$$

という長さ9の数列では、どの増加列も減少列も長さが高々3以下であるが、全体の長さを10にするために、10という数をどこに加えても、長さ4の増加列か減少列か生じてしまうことがわかる。例えば、

$$(1, 4, \underline{10}, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9)$$

には、 $(10, 7, 5, 3)$ という減少列が生じてしまっている。

解答. 相異なる $n^2 + 1$ 個の数からなる数列 $x_1, x_2, \dots, x_{n^2+1}$ を任意に固定する。各 x_i に次のように (a_i, b_i) を対応させる ($i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$):

$$\begin{aligned} a_i &: x_i \text{ で始まる最長の増加列の長さ} \\ b_i &: x_i \text{ で終わる最長の減少列の長さ} \end{aligned}$$

問題の結論を否定すると、どの a_i, b_i も1以上 n 以下なので、鳩の巣原理により、 $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ なる $i < j$ が存在する。任意の i, j に対して、 $x_i \neq x_j$ である。 $x_i < x_j$ ならば、 $a_i > a_j$ となり、 $x_i > x_j$ ならば、 $b_i < b_j$ となる。いずれの場合も $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ に矛盾する。■

問題 9.28 で証明された事実を使って次の問題を考えよう: これはグラフの“次元”に関するものである. ここでは, グラフの次元の正確な定義は与えないが, 完全グラフの次元についてのみ言及する.

自然数 $n \geq 3$ に対して, 集合 $N = \{1, \dots, n\}$ とその m 個の順列 π_1, \dots, π_m を考える. (すなわち, 各 π_i は N の要素を一行に並べたものである.) π_1, \dots, π_m が K_n を**表現する**とは, 任意の相異なる 3 数 $i, j, k \in N$ に対して, k が i, j の後に位置するような $\pi \in \{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ が存在することである. そして, K_n の**次元**とは, K_n を表現することができる順列の個数 m の最小値である. これを $\dim(K_n)$ と表す.

例えば, $\dim(K_3) = 3$ である. なぜなら,

$$\pi_1 = (1, 2, 3), \quad \pi_2 = (2, 3, 1), \quad \pi_3 = (3, 1, 2)$$

が K_3 を表現するからである. 次に, K_4 についてはどうだろうか. まず, $\dim(K_n) \leq \dim(K_{n+1})$ であることに注意せよ: なぜなら, K_{n+1} を表現するすべての順列から一斉に $n+1$ を消去すれば, その集合の組は K_n を表現しているからである. ゆえに, $\dim(K_4) \geq 3$ であり, 事実, 次のような順列の集合を取ればよい:

$$\pi_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \pi_2 = (2, 4, 3, 1), \quad \pi_3 = (1, 4, 3, 2).$$

さて, $\dim(K_5) = 4$ であることはそれほど明らかではないが, 驚くべきことに, $n = 12$ までは K_n の次元は 4 のままである. 次は, K_{12} を表現する 4 つの順列である:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 4) \\ \pi_2 &= (2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 1) \\ \pi_3 &= (3, 4, 1, 11, 12, 9, 10, 6, 5, 8, 7, 2) \\ \pi_4 &= (4, 1, 2, 10, 9, 12, 11, 7, 8, 5, 6, 3). \end{aligned}$$

このように見ると, $\dim(K_n)$ という関数は非常に扱いにくそうだが, n が無限大に近づくとき, 非常にきれいな関数で表すことができることが知られている. そして, その非常によい下界を鳩の巣原理を用いて求めることができる:

命題 9.29 自然数 $n \geq 3$ に対して, 次が成り立つ:

$$\dim(K_n) \geq \log_2 \log_2 n.$$

証明. 上で見たように, 関数 $\dim(K_n)$ は単調増加だから, $n = 2^{2^p} + 1$ に対して,

$$\dim(K_n) \geq p + 1$$

を証明すればよい.

背理法により, 結論を否定する. $\dim(K_n) \leq p$ であり, π_1, \dots, π_p を $N = \{1, 2, \dots, 2^{2^p} + 1\}$ を表現する順列とする. ここで, 問題 9.28 で証明された事実を p 回にわたって使う. 最初に, π_1 には長さ $\sqrt{2^{2^p}} + 1 = 2^{2^{p-1}} + 1$ の増加列, または, 減少列が見つかる. その列に含ま

れる数の集合を A_1 とおく. (すなわち, $|A_1| = 2^{2^{p-1}} + 1$ である.) そして, π_2 中の A_1 の順列を考える. すると, その中には長さ $2^{2^{p-2}} + 1$ の増加列, または, 減少列が見つかる. (この列は π_1 においても, 増加列か減少列になっていることに注意せよ.) その列に含まれる数からなる集合を A_2 とし, π_3 中の A_2 の順列に着目する. この議論を繰り返すことにより, π_p 中には長さ $2^{2^0} + 1 = 3$ の増加列, または, 減少列 (a, b, c) が見つかる. そして, この a, b, c はすべての π_i において, 増加列または減少列になっている. ゆえに, どの π_i においても, b は a, c の後に位置してない. これは, π_1, \dots, π_p が $K_{2^{2^p+1}}$ を表現することに反する. したがって, 命題が成り立つ. ■

完全グラフ K_n の次元のよりよい下界は次のようなものである:

$$\dim(K_n) \sim \log_2 \log_2 n + \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \log_2 \log_2 \log_2 n.$$

これらとコンピュータ実験により, 次のような正しい値が求められている:

$$\dim(K_n) \leq 4 \iff n \leq 12$$

$$\dim(K_n) \leq 5 \iff n \leq 81$$

$$\dim(K_n) \leq 6 \iff n \leq 2624$$

$$\dim(K_n) \leq 7 \iff n \leq 1422564$$

$K_{1422564}$ を表現することができる順列の最少数は 7 つか 8 つか, どのように決定したのだろうか.