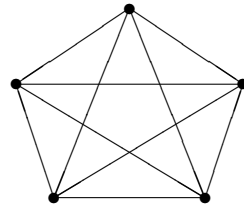
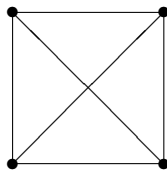
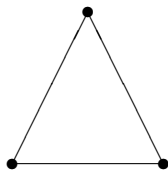


グラフ理論 テキスト



〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-2
横浜国立大学 環境情報研究院

中本 敦浩

Email: nakamoto@ynu.ac.jp

目次

第 1 章	グラフとは	3
1.1	グラフの定義	3
1.2	グラフ理論の基本定理?	6
1.3	次数列について	8
1.4	完全グラフ	11
1.5	2部グラフ	12
1.6	補グラフ	14
第 2 章	グラフの中の経路	15
2.1	オイラー回路	15
2.2	ハミルトン閉路	17
第 3 章	マッチング	21
3.1	2部グラフのマッチング	21
第 4 章	平面グラフ	24
4.1	オイラーの公式	24
4.2	正多面体	26
第 5 章	彩色問題	29
5.1	抽象グラフの彩色	29
5.2	平面グラフの彩色	30

第1章 グラフとは

1.1 グラフの定義

グラフ G とは、有限集合 V とその 2 元部分集合族 $E \subset \binom{V}{2}$ から決まる構造 $G = (V, E)$ である。通常、 X を小さな点で表し、 $\{x, y\} \in E$ のとき x と y を線で結ぶことにより、 G をいくつかの点とそれを結んで得られる図形で表す。このとき、グラフの点を頂点といい、それを結ぶ線を辺という。グラフ G の頂点集合と辺集合を $V(G)$ と $E(G)$ で表す。集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す。特に、 $|V(G)| = 0$ であるグラフ G を空グラフといい、 $|V(G)| = 1$ であるグラフ G を自明なグラフという。2 つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ が同型であるとは、 (V, E) と (V', E') が同じ構造を持つことである¹。例えば、図 1.1 は

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b, c, d, e, f, g\}, \\ E(G) &= \{ab, ac, cb, cd, bd, dg, ge, gf\} \end{aligned}$$

なるグラフ G を示している。(頂点 $x, y \in V(G)$ に対して、それを結ぶ辺は $V(G)$ の 2 元部分集合と定義されるので、 $\{x, y\} \subset V(G)$ と表さなくてはならないが、表記を簡単にするため、単に $xy \in E(G)$ と書く.)

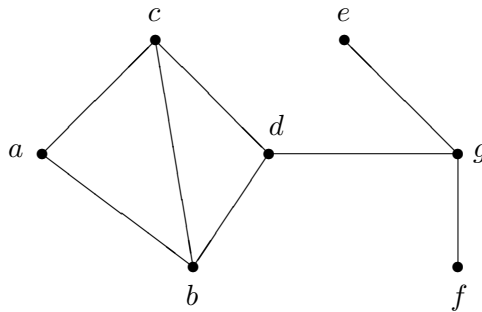


図 1.1: グラフ G

問題 1.1 図 1.2 の 12 個のグラフの中で、同型なグラフを挙げよ。

問題 1.2 4 頂点からなる同型でないグラフをすべて挙げよ。(このような問題では、ある種の方向性を持って場合を列挙する必要がある。この章の終わりに定義される補グラフを参照せよ.)

解答. 辺数に着目して列挙すると、図 1.3 のようになる。この際、 k 本の辺を持つグラフと $6 - k$ 本の辺を持つグラフに 1 対 1 対応があることを考えれば ($k = 0, 1, 2, 3$)、場合分けの数をずっと少なくすることができる。■

¹ ちゃんという、全単射 $\phi: V \rightarrow V'$ が存在し、任意の $u, v \in V$ に対して、 $uv \in E \iff \phi(u)\phi(v) \in E'$ が成り立つことである。この写像 ϕ を $\phi: G \rightarrow G'$ と書き、 G と G' の同型写像という。

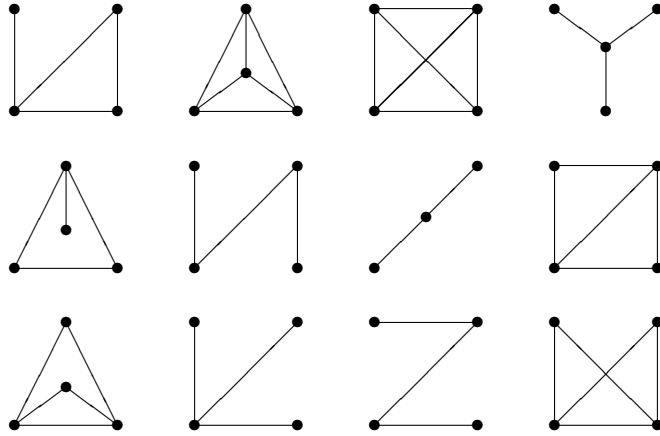


図 1.2: 同型なグラフはどれか

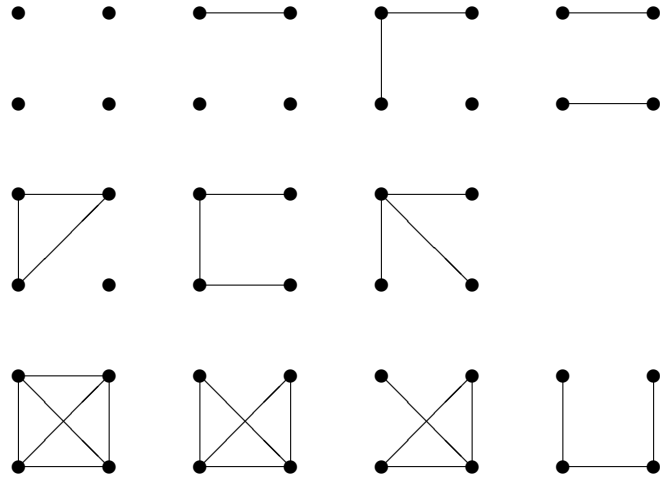


図 1.3: 4 頂点からなるすべてのグラフ

グラフは、有限集合 V とその 2 元部分集合族からなるので、どの 2 頂点も高々 1 本の辺で結ばれ、どの辺の両端点も異なっている。しかしながら、そうでない広義のグラフを考えると、それらを多重グラフという。多重辺とは同じ頂点对を結ぶ複数本の辺であり、ループとは自分自身を結ぶ辺のことである。多重辺もループも持たないグラフを単純グラフという。頂点 v に隣接する頂点を v の近傍といい、 v の近傍全体からなる集合を $N_G(v)$ と表す。グラフ G の頂点 v に接続する辺の本数を次数といい、 $\deg_G(v)$ で表す。次数が偶数の頂点を偶点といい、奇次数の頂点を奇点という。特に、次数 0 の頂点を孤立点という。グラフ G が単純なら、 $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ である。グラフ G 中の次数の最大値と最小値を最大次数と最小次数といい、 $\Delta(G)$ と $\delta(G)$ で表す。特に、 $\Delta(G) = \delta(G) = k$ のとき、 G は正則、または、 k -正則であるという。

隣接する 2 点が異なる色を持つように頂点全体を 2 色 (白と黒) で塗ることができるグラフを 2 部グラフという (図 1.4 参照)。同色で塗られた頂点集合を部集合という。部集合 X, Y を持つ 2 部グラフを G を $G = (X, Y)$ と表す。

すべての点対が結ばれた n 点のグラフを完全グラフといい、 K_n と表す。グラフ中の経路を歩道といい、閉じた歩道を閉歩道という。すべての頂点が異なる歩道を道、またはパスといい、すべての頂

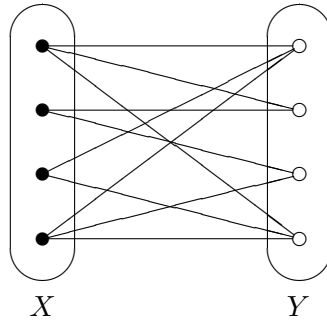


図 1.4: $|X| = |Y| = 4$ なる 2 部グラフ $G = (X, Y)$

点が異なる閉歩道を閉路, またはサイクルという (図 1.5 参照). 閉路の長さの偶奇性によって, 偶閉路や奇閉路という.

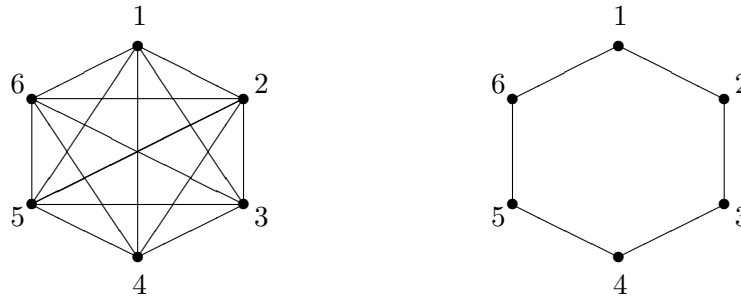


図 1.5: 完全グラフ K_6 とサイクル C_6

命題 1.3 最小次数 2 以上の任意のグラフは閉路を含む.

解答. G を最小次数 2 以上のグラフとし, v_0 を任意の頂点とする. ここで, v_0 のある近傍を v_1 とおく. そして, v_i の近傍で v_{i-1} でないものを v_{i+1} とおく. (このとき, v_i の次数は 2 以上であるから, v_{i+1} が常に選べることに注意せよ.) この操作を $i = 1, 2, \dots$ について行うことにより, G に歩道 $W = v_0v_1v_2 \dots$ を取ることができる. G は有限グラフなので, ある異なる i, j ($|i - j| \geq 3$) に対して, $v_i = v_j$ となる. このとき, $|i - j|$ を最小に選ぶことにより, $v_iv_{i+1} \dots v_j$ は閉路となる. ■

グラフが連結であるとは, 任意の 2 頂点を結ぶパスが存在することである. グラフ G が連結でないとき, G のそれぞれの連結な部分グラフを連結成分という. G の連結成分の個数を連結成分数といい, $\omega(G)$ で表す.

閉路を含まない連結グラフを木という. 道は木であるし, 命題 1.3 より, 2 頂点以上の任意の木は次数 1 の頂点を持つことがわかる.

命題 1.4 n 頂点の木の辺数は $n - 1$ である.

解答. T を n 頂点の木とし, n に関する帰納法を用いる. $n = 1$ のとき, T は 1 頂点のみのグラフであり, 辺数は 0 となり, 命題は成立する. $n \geq 2$ のとき, 命題 1.3 により, T は次数 1 の頂点 v を持つ. このとき, グラフ $T' = T - v$ は連結, かつ, 閉路を持たないことに注意せよ. ゆえに, T' は $n - 1$ 頂点の木となりから, 帰納法の仮定より, 辺数は $(n - 1) - 1 = n - 2$ となる. したがって, T の辺数は $n - 1$ となる. ■

問題 1.5 6 頂点以下の木をすべて挙げよ.

解答. 例えば, グラフ中の最も長い道の長さに着目することにより, 図 1.6 のように列挙することができる. ■

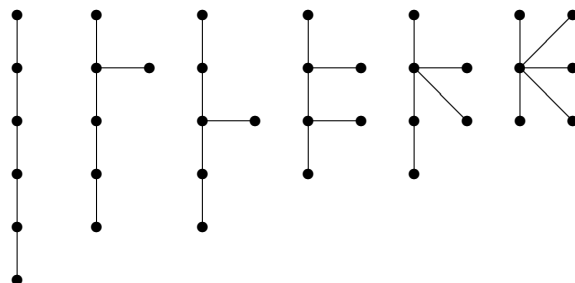


図 1.6: 6 頂点からなるすべての木

グラフ G の 2 頂点 x, y に対して, x と y を結ぶパスの長さの最小値を G における x と y の距離といい, $d(x, y)$, または $d_G(x, y)$ と表す. グラフ G の直径 $d(G)$ とは

$$d(G) = \max\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$$

と定義される.

グラフ $G = (V, E)$ に対して, $V' \subset V, E' \subset E$ を満たすグラフ $G' = (V', E')$ を G の部分グラフという. 特に, $V = V'$ のとき, G' は全域部分グラフと呼ばれる. また, 木である全域部分グラフを全域木という. グラフ G が全域木を持つとき, G は必ず連結である. G に対して, $S \subset V(G)$ を固定する. S によって誘導される部分グラフ, または, S による誘導部分グラフ ($\langle S \rangle$ で表す) は, 次のように定義されるものである:

$$\begin{aligned} V(\langle S \rangle) &= S \\ E(\langle S \rangle) &= \{uv \in E(G) : u, v \in S\}. \end{aligned}$$

特に, $V(G)$ による誘導部分グラフ $\langle V(G) \rangle$ は G 自身である.

グラフ G が平面に埋め込まれているとき, すなわち, G が辺の交差なく平面に描かれているとき, このようなグラフを平面グラフという. $F(G)$ により G の面の集合を表す. (G の面とは, 平面から G を除いたときに生じる連結領域である.) 外側の非有界領域を外領域, または, 無限面といい, それ以外の面を有限面という. 平面グラフとして, 平面に実現できるグラフを平面的グラフという. 平面グラフにおいて, 辺数が極大なものを極大平面グラフという.

命題 1.6 極大平面グラフの各面は三角形である. ■

1.2 グラフ理論の基本定理?

数学のいろいろな分野の中には, その分野の基本定理を持つものがある. グラフ理論には, 特にそのようなものはないが, この章では, それに値すると思われる定理とその応用について述べる.

次の命題と系が基本定理(?) である.

命題 1.7 (握手補題) 任意のグラフにおいて, 次数の総和は辺数の 2 倍に等しい.

証明. グラフにおいて, 各頂点の次数をすべて足す. すると, 各辺はちょうど2回ずつ数えられたことになる. ■

系 1.8 (奇点定理) 任意のグラフにおいて, 次数が奇数の点 (奇点) は偶数個存在する.

証明. 握手補題より, 次数の合計は偶数である. 奇次数の頂点が奇数個あれば, 次数の合計が奇数になってしまう. これは矛盾である. ■

以下では, 奇点定理の応用例を紹介する. 偶奇性の議論により, 驚くような事実をたくさん証明できることがわかるだろう.

命題 1.9 外領域が奇角形であり, 有限面がすべて偶角形の平面グラフは存在しないことを証明せよ.

証明をする前に, 平面グラフ G の双対グラフ G^* を次のように定義する. まず, G の各面 $f \in F(G)$ の中心の頂点 v_f を置く. そして, f と f' が辺 e を共有するとき, v_f と $v_{f'}$ を e を横切る辺 e^* により結ぶ. このように得られるグラフが G^* である² (図 1.7 参照). 定義より, $(G^*)^* = G$ である.

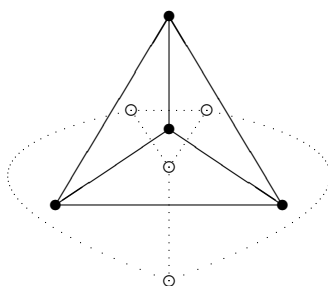


図 1.7: 双対グラフ G^*

命題 1.9 の証明. 外領域が奇角形で, すべての有限面が偶角形の平面グラフが存在すると仮定し, それを G とする. そして, G の双対グラフ G^* を考える. G^* において, G の外領域 F に対応する頂点の次数は奇数であり, G のすべての有限面に対応する頂点の次数は偶数である. これは, 奇点定理に反する. したがって, そのような G は存在しない. ■

命題 1.10 極大平面グラフ (外領域も有限面もすべて三角形の平面グラフ) の外領域の 3 点に順に番号 1, 2, 3 を与える (図 1.8 参照). どのように内点に 1, 2, 3 を与えても, 境界上に 1, 2, 3 がすべて現われている三角形が生じることを証明せよ.

証明. 極大平面グラフ G の外側の頂点に 1, 2, 3 をすべてを, 内側に頂点にも 1, 2, 3 を適当に与える. このとき, 次のようにして, G^* の全域部分グラフ H を定義する: 辺 e を共有する G の面 f, f' に対して, e の端点が異なる数 i, j を持っているときのみ, v_f と $v_{f'}$ を辺で結ぶ. 面 f の境界では, 1, 2, 3 のすべてが現れる場合, 2 つの数が見える場合, すべての数が同一である場合のいずれかの状況が起こっており ($i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ は相異なる数である), 対応する頂点 v_f の H での次数はそれぞれ 3, 2, 0 となる:

² G^* は $V(G^*) = F(G)$ となるグラフであり, G が単純だからといって, G^* は必ずしも単純にならない. 特に, $|E(G)| = |E(G^*)|$ である.

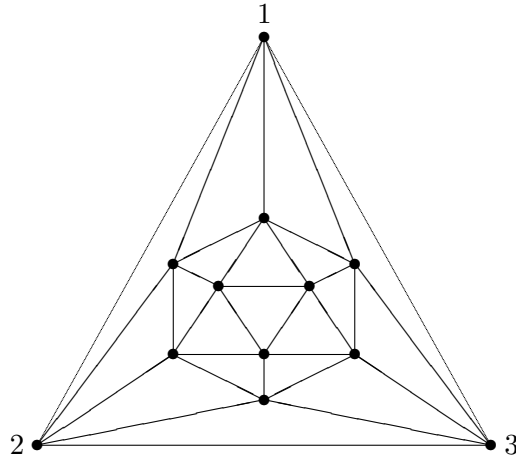
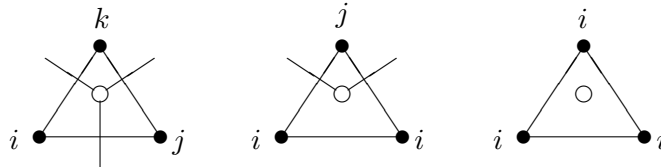


図 1.8: 外側の頂点に 1, 2, 3 が与えられた極大平面グラフ



外領域 F には 3 つの異なる数が現れているので, $\deg_H(v_F) = 3$ である. ここで, もし有限面の境界に 1, 2, 3 のすべてが現れるものがないと, すべての有限面 f に対応する頂点 v_f に対して, $\deg_H(v_f) = 0, 2$ である. H において, v_F のみが奇次数を持つことになり, H が奇点定理を満たさない. これは矛盾であり, 有限面にはその境界に 1, 2, 3 のすべてが現れるものが存在する. ■

1.3 次数列について

グラフ G の次数を並べたものを G の次数列という. 前節で触れたように, 奇点定理により, 次数をすべて加えると必ず偶数になるはずである. 逆に, 奇点定理を満たす非負整数列を勝手に与えたとき, それを次数列とするようなグラフは常に存在するといえるだろうか. この節では, この問題について考える.

整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次数列とするグラフが存在するとき, d はグラフ的であるという. ここで, 扱うグラフは単純であること, すなわち, 多重辺やループを持たないことを強調しておく. なぜなら, 次の命題が成り立つからである:

命題 1.11 和が偶数である任意の非負整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次数列とする多重グラフが存在する.

証明. d_1, \dots, d_n のすべてが偶数のとき, 頂点 v_i に $\frac{d_i}{2}$ 本のループを接続させればよい. そうでない場合, 一般性を失うことなく d_1, d_2, \dots, d_{2h} が奇数としてよい. このとき, 数列 $d' = (d'_1, \dots, d'_n)$, ただし,

$$d'_i = \begin{cases} d_i - 1 & (i = 1, \dots, 2h) \\ d_i & (i = 2h + 1, \dots, n), \end{cases}$$

は偶数のみからなる. 上の構成により, $\deg(v_i) = d'_i$ なる多重グラフが得られるので, それに h 本の辺 $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2h-1}v_{2h}$ を加えることにより, 図 1.9 のように次数列 d の多重グラフが得られる. ■

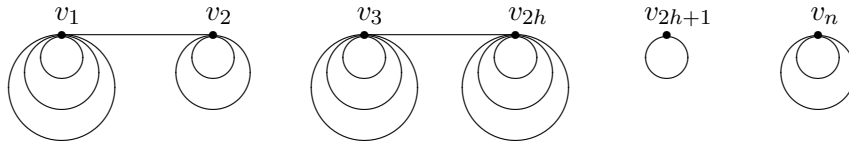


図 1.9: 次数列 d の多重グラフ

整数列がグラフ的かどうかを、単純グラフに限定して考えることにする。その前に、単純グラフの次数列の性質を少し紹介する。

命題 1.12 任意のグラフ G において、次数の等しい 2 点が存在する。

この命題は次のように言い換えられる：教室に n 人の学生がいる。1 人ひとりに、この中に何人友達がいるか尋ねたら、必ず、友人の数が等しい学生が 2 人以上いる。ただし、自分自身は自分の友人でなく、友人関係は対称であるとする（すなわち、 A が B の友人であれば、 B も A の友人である）。

命題 1.12 の証明. G の頂点集合を $\{v_1, \dots, v_n\}$ とし、すべての頂点の次数が異なると仮定する。自分自身を結ぶ辺は存在しないので、

$$n-1 \geq \deg(v_1) > \deg(v_2) > \dots > \deg(v_n) \geq 0$$

である。このとき、明らかに

$$(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_{n-1}), \deg(v_n)) = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$$

である。 $\deg(v_1) = n-1$ と $\deg(v_n) = 0$ は両立しないので、これは矛盾である。したがって、ある 2 点は次数が等しいことになる。 ■

命題 1.12 により、 n 頂点からなるグラフのすべての頂点の次数が異なることはできない。しかし、次の問題では、1 つの頂点以外はすべての次数が異なることあり、ある条件をつければ、そのグラフが一意的に定まることを意味している。これは、グラフを使うと、難しそうな問題が一発で解けるという例として、よく紹介されている。

問題 1.13 3 組の夫婦からなる 6 人の間で握手を数回交わした。私以外の握手の回数はすべて異なり、同じ夫婦間では握手をしなかったとする。このとき、私の配偶者の握手の回数は何回か。

問題 1.13 は次の問題と同じである。

問題 1.14 6 頂点のグラフがあり、その頂点を a, a', b, b', c, c' とする。 $aa', bb', cc' \notin E(G)$ であり、頂点 a 以外のすべての次数は異なっている。このとき、頂点 a' の次数を求めよ。

解答. どの頂点にも非隣接な点が存在するので、 a 以外の頂点の次数は $0, 1, 2, 3, 4$ である。次数 4 の頂点は次数 0 の頂点以外にはすべて隣接しているので、次数 0 と次数 4 の点が b, b' であるとしてよい。(図 1.10 左参照。)

図 1.10 左において、次数 3 と次数 2 の頂点を作るために辺を追加しなければならない。しかし、次数 0, 1, 4 の頂点には辺を結ぶことはできない。辺の追加の方法は一意的であり、図 1.10 右が得られる。次数 3 の頂点の非隣接な点は次数 1 の頂点であり、これらを c, c' と置いてよい。したがって、 a' の次数は 2 であることがわかる。 ■

問題 1.14 を以下のように拡張せよ。



図 1.10: 6 頂点グラフの決定

問題 1.15 $2k$ 頂点のグラフがあり, その頂点を $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ とする. すべての i に対して, $a_i b_i \notin E(G)$ であり, 頂点 a_1 以外のすべての次数は異なっている. このとき, 頂点 b_1 の次数を求めよ.

この節の最後に, 整数列がグラフ的となる必要十分条件を与える. これは, 与えられた整数列がグラフ的かどうかを再帰的に判定するアルゴリズムを与えるものである.

定理 1.16 整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, ただし, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, がグラフ的であるための必要十分条件は,

$$d' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$$

がグラフ的であることである.

証明. 次数列 d' を持つグラフ G' が存在すれば, 新しい頂点を次数 $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1$ の頂点に辺で結ぶことにより, 次数列 d のグラフ G が構成できる.

一方, G を d を実現するグラフとし, v_i を次数 d_i の頂点とする.

$$k_G = |N_G(v_1) \cap \{v_{d_1+2}, \dots, v_n\}|$$

とおく. $k_G = 0$ のとき, すなわち, v_1 が $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ に隣接しているとき, G から v_1 を除去して得られたグラフの次数列が d' になる. そこで, $k_G > 0$ とする. このとき, $2 \leq i \leq d_1 + 1 < j \leq n$ なるある (i, j) に対して, v_1 は v_i と隣接せず, v_j と隣接している. $\deg(v_i) \geq \deg(v_j) \geq 1$ であるから, v_i の近傍には v_j と隣接しないもの (x とする) が存在する. グラフ $\tilde{G} = G - \{v_1 x, v_1 v_j\} \cup \{v_1 v_i, v_j x\}$ を考えると, \tilde{G} の次数列は d となり,

$$k_{\tilde{G}} = |N_{\tilde{G}}(v_1) \cap \{v_{d_1+2}, \dots, v_n\}| < k_G$$

である. この変形を繰り返すことにより, 次数列 d であり, $k_{G_0} = 0$ を満たすグラフ G_0 が得られる. ■

上の証明の中では, k_G という数に関する数学的帰納法が用いられている. ($k_G = 0$ が目標とする状態であり, $k_G > 0$ ならば, k_G が減らせることを証明している.) このように, 異なる 2 つの状態が, ある変形を繰り返して, 変形できることを証明するとき, その 2 つの距離のようなものをうまく定義して, それがいつでも減らせることを証明することは, このような問題における常套手段である.

定理 1.16 を使って, 次の整数列がグラフ的かどうか判定してみよう: $(4, 4, 3, 2, 1)$, $(4, 4, 3, 3, 2)$, $(5, 4, 3, 3, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 1, 1)$.

- $(4, 4, 3, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 1, 0) \rightarrow (1, 0, -1)$ これはグラフ的でない.

- $(4, 4, 3, 3, 2) \rightarrow (3, 2, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 0)$ これはグラフ的である.
- $(5, 4, 3, 3, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 2, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ これはグラフ的である.
- $(2, 2, 2, 2, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 2, 1, 1) = (2, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1) = (1, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ これはグラフ的である.

注意すべきことは、定理 1.16 を適用する際、整数列を非増加順序に並べておく必要があることである。最初の 3 つの場合は自動的に非増加順序が保たれたが、最後の数列の場合、非増加順序への並べ替えを怠ると判定を間違ってしまう。

1.4 完全グラフ

この節では、完全グラフについていろいろ考えてみることにする。完全グラフの定義はすでに第 1.1 節で与えている。

命題 1.17 完全グラフ K_n の辺数は $\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ である。(ただし、 $\binom{n}{k}$ は 2 項係数³であり、 n 個から k 個を選ぶ選び方の総数である。)

証明. 証明 (1). どの 2 点も辺で結ばれているので、 K_n の辺数は $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ である。

証明 (2). n 個の頂点はすべて次数 $n-1$ である。したがって、握手補題 1.13 より、辺数は $\frac{1}{2}n(n-1)$ である。

証明 (3). K_1 の辺数は 0, K_2 の辺数は $0+1, \dots, K_{n-1}$ の辺数は $1+\dots+(n-2)$, K_n は K_{n-1} のすべての頂点に新しい頂点を結んでできるので、 K_n の辺数は $(0+1+\dots+(n-2))+n-1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$ である。■

問題 1.18 完全グラフ K_n の中の長さ 3 の閉路 C_3 の総数を求めよ。また、 C_4 の総数と C_5 の総数を求めよ。

解答. 頂点を 3 つ選べば、ただ 1 つの C_3 が決定されるので、 C_3 の総数は $\binom{n}{3}$ である。整数 $k \leq n$ に対して、 K_n の中の C_k の総数を求める。 K_n から k 頂点選んで、その円順列の総数は $\binom{n}{k} \times (k-1)!$ である。円順列の反対周りも同一の閉路に対応するので、 C_k の総数は

$$\frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1) = \frac{n!}{2k(n-k)!}$$

である。■

問題 1.19 $n_1, n_2 (n_1 \geq n_2)$ を $n_1 + n_2 = 30$ なる非負整数であるとする。このとき、 $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ が最大となるのは、 $n_1 = 30, n_2 = 0$ のときであることを証明せよ。また、非負整数 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ が $n_1 + \dots + n_k = n$ を満たすとき、 $\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}$ が最大になるのはどのようなときか。

解答. (解析的アプローチ) $n_1 + n_2 = 30 (n_1 \geq n_2 \geq 0)$ であるから、 $n_2 = 30 - n_1 (15 \leq n_1 \leq 30)$ を代入して、

$$\begin{aligned} \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} &= \frac{1}{2}n_1(n_1-1) + \frac{1}{2}n_2(n_2-1) \\ &= \frac{1}{2}(n_1^2 - n_1 + (30 - n_1)^2 - (30 - n_1)) \\ &= (n_1 - 15)^2 + 210. \end{aligned}$$

³ 高校では $\binom{n}{k} = {}_nC_k$ と表していた。

これは $n_1 = 30$ のときに最大値 435 を取る. (途中計算は省略しているが, かなりの手間である.) ■

(離散的アプローチ) $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ は, 命題 1.17 より, K_{n_1} の辺数と K_{n_2} の辺数の和である. $n_2 \geq 1$ ならば, $|E(K_{n_1+1})| + |E(K_{n_2-1})| > |E(K_{n_1})| + |E(K_{n_2})|$ であるから, $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ が最大ならば, $n_1 = 30, n_2 = 0$ である. 最大値は $\binom{30}{2} = 435$ である.

全く同じ議論により, $K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \dots \cup K_{n_k}$ の辺数が最大になるのは, $n_1 = n, n_2 = \dots = n_k = 0$ のときであり, その最大値は $\binom{n}{2}$ である. ■

1.5 2部グラフ

まず, 与えられたグラフが 2 部グラフであるための必要十分条件について述べる.

命題 1.20 グラフ G が 2 部グラフであるための必要十分条件は, G が奇閉路を含まないことである.

証明. 2 部グラフは同色が隣接しないように, 頂点全体が白と黒で塗れる. そして, 2 部グラフの任意の閉路は白と黒の頂点を交互に通過するので, その長さは偶数になる.

十分性は G が連結のときについてのみ示せば十分である. グラフ G の任意の頂点 v_0 を固定する. そして, 次のように $X, Y \subset V(G)$ を定める:

$$\begin{aligned} X &= \{u \in V(G) : d_G(v_0, u) \text{ が偶数} \} \\ Y &= \{u \in V(G) : d_G(v_0, u) \text{ が奇数} \}. \end{aligned}$$

G は連結なので, $X \cup Y = V(G)$ であり, また, 明らかに, $X \cap Y = \emptyset$ である. G は 2 部グラフでないので, $x, x' \in X$ に対して, $xx' \in E(G)$ (または, $y, y' \in Y$ に対して, $yy' \in E(G)$) であるとしてよい. このとき, $P = v_0Px, xx', x'P'v_0$ は長さ奇数の閉歩道である (ただし, P は v_0 と x を結ぶ長さ偶数の道であり, P' は v_0 と x' を結ぶ長さ偶数の道である.) P は閉路でないかもしれないが, P には長さ奇数の道が含まれる. ■

命題 1.9 と命題 1.20 を組合せると, 次の定理が証明できる.

定理 1.21 平面を偶角形に分割するグラフは 2 部グラフである.

証明. 平面を偶角形に分割するグラフ G は 2 部グラフでないかと仮定する. すると, 命題 1.20 により, G は奇閉路 C を持つ. しかしながら, 命題 1.9 により, C の内部は偶角形に分割できない. これは矛盾である. ■

同じような議論により, 次の命題が証明できる.

命題 1.22 外領域が 5 角形, その他の面はすべて 3 角形, かつ, すべての頂点の次数が偶数の平面グラフは存在しない.

証明. 命題の条件を満たすグラフ G が存在したと仮定する. すると, G の次数はすべて偶数なので, G の双対グラフ G^* の面はすべて偶角形である. したがって, 定理 1.21 により, G^* は 2 部グラフであり, $G^* = (X, Y)$ と表すことができる (X, Y は G^* の部集合である). さらに, G^* には次数 5 の頂点 v がただ 1 つ存在し, 残りの頂点の次数はすべて 3 である. 一般性を失うことなく, $v \in X$ としてよい. このとき, Y に属す頂点の次数はすべて 3 なので, Y から X に向かう辺の本数は 3 の倍数である. しかしながら, X には v があるため, X から Y に向かう辺の本数は 3 の倍数ではない. これは矛盾である. ■

次に、立方体グラフについて述べる。自然数 n に対して、グラフ Q_n が n 次元立方体グラフは次のように定義される (図 1.11 参照):

$$V(Q_n) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

$$E(Q_n) = \{xy : d_h(x, y) = 1, x, y \in V(Q_n)\},$$

ただし、 $x = (a_1, \dots, a_n)$ と $y = (b_1, \dots, b_n)$ に対して、 x, y のハミング距離 $d_h(x, y)$ は $d_h(x, y) = |\{i : a_i \neq b_i\}|$ のように定義される。

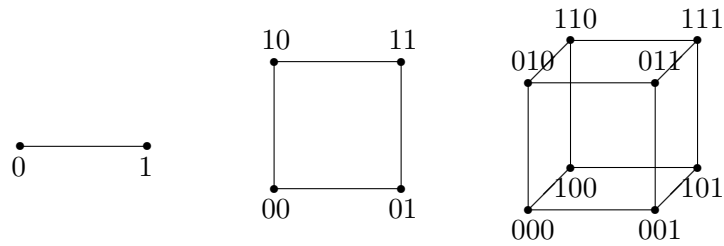


図 1.11: n 次元立方体グラフ

問題 1.23 立方体グラフ Q_n について、次を証明せよ。

- (i) $|V(Q_n)| = 2^n$,
- (ii) $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$,
- (iii) $d(Q_n) = n$,
- (iv) Q_n は 2 部グラフであること。

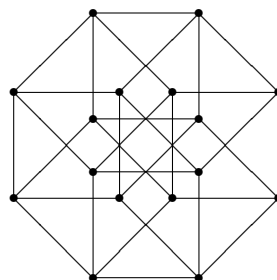
証明. (i) 各頂点は (a_1, a_2, \dots, a_n) という形で与えられており、各 a_i は 0 か 1 なので。

(ii) 各頂点の次数は n である。(i) より、 Q_n の頂点数は 2^n だから、握手補題より、 $|E(Q_n)| = n \times 2^n / 2 = n2^{n-1}$ 。

(iii) $(0, 0, \dots, 0)$ と $(1, 1, \dots, 1)$ のハミング距離は n であり、どの 2 頂点間の距離は n 以下である。

(iv) 各頂点 (a_1, \dots, a_n) に対して、値 $\sum_{i=1}^n a_i$ を考える。その値が偶数のものを黒に塗り、奇数のものを白で塗る。同色の頂点は隣接しないので、 Q_n は 2 部グラフである。■

問題 1.24 次の図は 4 次元立方体グラフ Q_4 である。上のように、 Q_4 の頂点全体に長さ 4 の 0, 1 の列を与えよ。



1.6 補グラフ

グラフ G に対して, G の補グラフ \overline{G} とは,

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &= V(G) \\ E(\overline{G}) &= \{uv : uv \notin E(G)\} \end{aligned}$$

を満たすものである. 明らかに, $\overline{\overline{G}} = G$ である. 特に, $G = \overline{G}$ となるグラフを自己補グラフという (図 1.12 参照). 1 頂点からなるグラフは自己補グラフではないとする.

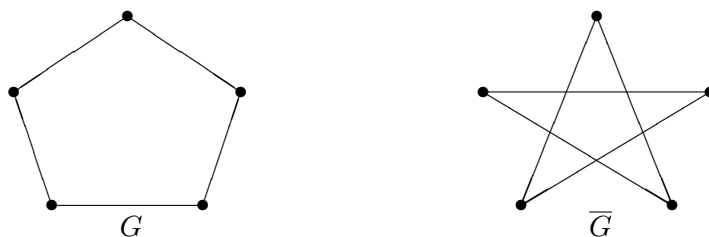


図 1.12: 自己補グラフ C_5

命題 1.25 任意のグラフ G において, G または \overline{G} は連結である.

証明. グラフ G が非連結のとき, \overline{G} が連結であることを示せばよい. G の連結成分を H_1, \dots, H_k とおけば, \overline{G} は完全 k 部グラフ $K_{|V(H_1)|, \dots, |V(H_k)|}$ を全域部分グラフとして含む. これは連結だから, \overline{G} も連結である. ■

系 1.26 自己補グラフは連結である.

証明. 非連結な自己補グラフ G が存在すれば, G は命題 1.25 を満たさない. 矛盾. ■

命題 1.27 $n \geq 2$ 頂点の自己補グラフが存在するための必要十分条件は, $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ である.

証明. G が自己補グラフなら, $|E(G)| = |E(\overline{G})|$ である. また, 命題 1.17 により, $|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \frac{1}{2}n(n-1)$ である. したがって, $|E(G)| = \frac{1}{4}n(n-1)$ であり, これが整数になるためには, $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ が必要である.

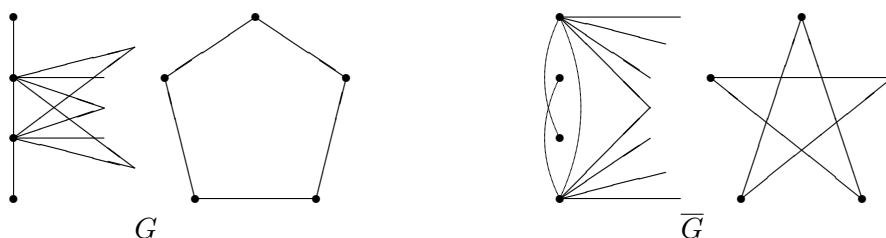


図 1.13: 自己補グラフ構成法

十分性を示す. 頂点数 4 の道 $P_4 = v_1v_2v_3v_4$ が自己補グラフになることは容易に確かめられる. さらに, 図 1.12 の C_5 は 5 頂点の自己補グラフである. 今, n 頂点の自己補グラフ H が存在するとき, $n+4$ 頂点の自己補グラフが存在することを証明すればよい. P_4 の v_2, v_3 から H のすべての頂点に辺を結んで得られるグラフを K とすると, K は自己補グラフである (図 1.13 参照). ■

第2章 グラフの中の経路

グラフ G のオイラー回路とは G の各辺をちょうど1回ずつ通る閉歩道である。一方, G のハミルトン閉路とは, G のすべての頂点をちょうど1回ずつ通る閉路である。この章では, グラフ中のこの2種類の巡回的経路について述べる。

2.1 オイラー回路

ある図形が一筆描き可能とは, 一度, 鉛筆を紙に立てたならば, 鉛筆を離すことなく, かつ, 同じ辺を2度以上たどることなく, その図形が描ききれることである。このとき, 描かれた図形は点と線からなるもの, いわゆるグラフ, である。グラフ G が一筆描き可能であるとは, すべての辺をちょうど1回ずつたどる歩道が存在することである。

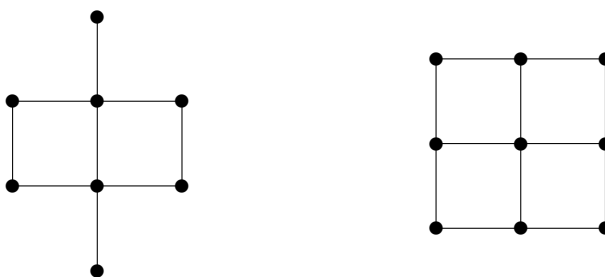


図 2.1: 一筆描き可能か

次の定理はグラフがオイラー回路を持つ (すなわち, 始点と終点が一致するように一筆描きが可能) ための必要十分条件をあたえるものである。

定理 2.1 グラフ G がオイラー回路を持つための必要十分条件は, G は連結であり, かつ, G の各頂点の次数が偶数であることである。

この定理から, 直ちに, 次の一筆描きの定理を導くことができる。これを定理 2.1 の定理の証明の後に示す。

定理 2.2 グラフ G が一筆描き可能であるための必要十分条件は, G は連結であり, かつ, G の奇点の数が0か2であることである。

定理 2.1 の証明に入る。しかし, この定理において, 必要性と十分性のどちらかが明らか考えて欲しい。(しばしば, 間違っている人がいる。)

定理 2.1 の証明. 必要性は明らかである。グラフ G がオイラー回路を持てば, まず, G は連結である。また, G のすべての辺にオイラー回路に沿って矢印が付けられるので, 任意の頂点 v において, v を出発する矢印と v に到達する矢印の数は同じになる。したがって, v の次数は偶数である。

十分性を証明する. G の次数の総和に関する帰納法を用いる. G が連結であり, かつ, すべての頂点の次数が 2 であれば, G は閉路であり, 明らかに, オイラー回路を持つ. したがって, G は次数 4 以上の偶点を持つとする. G の任意に固定された頂点 v_0 を出発し, 同一の辺は 2 度以上たどらない歩道 W を延ばせるだけ延ばす. まず, W は v_0 で終わることがわかる. なぜなら, それ以外の頂点 v の次数は偶数なので, W が v に進入したら, v から退出する辺が常に残っているからである. 今, $G' = G - E(W)$ とおき, G' の自明でない連結成分を H_1, \dots, H_k とする. 各 H_i は連結である. また, 各頂点に接続する辺において, W の使ったものは偶数本であるから, 各 H_i のすべての頂点の次数は偶数である. したがって, 帰納法の仮定により, H_i はオイラー回路 W_i を持つ. 今, G において, W_1, \dots, W_k は交わりがなく, G の任意の辺は W またはある W_i に含まれていることに注意せよ. G は連結なので, W と各 W_i に共通に含まれる頂点 v_i を持つ. W 上に v_1, \dots, v_k はこの順で現れるとしてよい. このとき, v_0 を出発し, W に沿って進む. そして, v_1 に到着したら, W_1 に沿って進み, W_1 上で再び v_1 に到着したら, また W に沿って進むことにする. そして, W 上で v_2 に到着したら, また同様の操作を W_2 に関して行う. これを繰り返して, 各 v_i で W_i に乗り換えることにより, $W \cup W_1 \cup \dots \cup W_k$ から G のオイラー回路を得ることができる. ■

定理 2.1 \Rightarrow **定理 2.2** の証明. 定理 2.2 を証明する. まず, グラフ G が一筆描き可能ならば, その一筆描きの経路の始点と終点が一致するかしないかによって, グラフの奇点の数が 0 か 2 になる.

一方, グラフ G が連結であり, 奇点を持たなければ, 定理 2.1 より, G はオイラー回路を持ち, 始点と終点が一致するように一筆描きが可能である. もし, G がちょうど 2 つの奇点 u, v を持つならば, グラフ $G' = G \cup uv$ のすべての次数は偶数になり, 定理 2.1 より, G' はオイラー回路 W を持つ. G の経路 $W - uv$ が u, v を結ぶ G の一筆描きの経路である. ■

さて, 定理 2.1 を強めてみよう. 定理 2.1 より, 各頂点の偶次数の連結グラフはオイラー回路を持つことが証明された. そのような平面グラフにおいては, なるべく自己交差 (すなわち, 自分自身を横切ること) のないオイラー回路が見つけたい.

定理 2.3 G を連結な平面グラフで, 各頂点の次数が偶数であるものとする. このとき, G は自己交差のないオイラー回路を持つ.

構成的な証明と帰納法による証明の 2 通りを行う.

構成的な証明. G の双対グラフ G^* において, 各面が偶角形になっていることがわかる. したがって, 定理 1.21 より, G^* は 2 部グラフである. ゆえに, G の面全体を, 辺で接する面は互いに異なる色を持つように, 2 色 (白と黒とする) で塗れる.

B_1, \dots, B_k を黒で塗られた G^* の面全体とする. 各 B_i の境界閉歩道を ∂B_i と表す. すると, 任意の辺 $e \in E(G)$ はただ 1 つの ∂B_i にちょうど 1 回だけ現れる.

グラフ \mathcal{B} を次のように定義する:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{B}) &= B_i \quad (i = 1, \dots, k) \\ E(\mathcal{B}) &= \{B_i B_j : \partial B_i \cap \partial B_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

G は連結なので, \mathcal{B} も連結である. ゆえに, \mathcal{B} は全域木 $T_{\mathcal{B}}$ を持つ.

$B_i B_j \in E(\mathcal{B})$ なる B_i, B_j に対して, 1 つの頂点 $v_{ij} \in \partial B_i \cap \partial B_j$ を適当に選ぶ. 次のようにして, $\cup_{i=1}^k \partial B_i$ の中に求めるオイラー回路 W を見つけることができる. 適当に番号を付け替えて, 全域木 $T_{\mathcal{B}}$ は頂点 B_1 から次数 1 の頂点 B_i を次々と加えることにより得られるとしてよい ($i = 2, \dots, k$).

このとき, $W_1 = \partial B_1$ とする. また, W_{i-1} がすでに定義されているとき, W_{i-1} に ∂B_i を頂点 $v_{i-1} \in V(G)$ (ただし, $B_{i-1} B_i \in E(T_{\mathcal{B}})$ である) に沿って縫い付ける. $W_{i-1} \cup \partial B_i$ の中に自己交差を持たない唯一の閉歩道が見つかる. それを W_i とする.

この手順により、最終的に、 G の自己交差のないオイラー回路 $W = W_k$ が得られる。■

帰納法による証明. G が多重辺やループを持つ場合も同時に証明する. G の辺数に関する帰納法を用いる.

G のすべての次数が2ならば、定理は明らかに成り立つ. ゆえに、 G は次数4以上の頂点 v を持つ. v に接続する辺を v のローテーションに関して e_1, \dots, e_l とする (ただし、 $e_i = vv_i$ とする). v が G の切断点のときは、 $G - \{e_1, e_2\}$ が連結になるようにとれ. (もし、 $G - \{e_1, e_2\}$ が非連結なら、 $G - \{e_2, e_3\}$ が連結になるから、そのように e_1, e_2 を選ぶことができる.)

さて、グラフ $G' = (G - \{e_1, e_2\}) \cup v_1v_2$ を考え、自然に得られる G' の平面埋め込みを考える. G' は G より辺数が少なく、また、連結であり、各頂点の次数は偶数だから、帰納法の仮定により、自己交差のないオイラー回路 W' を持つ. $W = (W' - v_1v_2) \cup \{e_1, e_2\}$ が G の自己交差のないオイラー回路である. ■

この帰納法による証明は、平面性を無視すると、定理 2.1 の簡単な証明になっていることがわかる.

2.2 ハミルトン閉路

前節では、グラフがオイラー回路を持つための必要十分条件を与えた. これは、かなり単純なものであった. その類推から、ハミルトン閉路の存在のための必要十分条件も、同様に単純であると思われるかもしれない. しかし、それは大違いである. それは、かなり見通しの暗い未解決問題である.

問題 2.4 図 2.2 のグラフがハミルトン閉路を持つかどうかを考えてみよう.

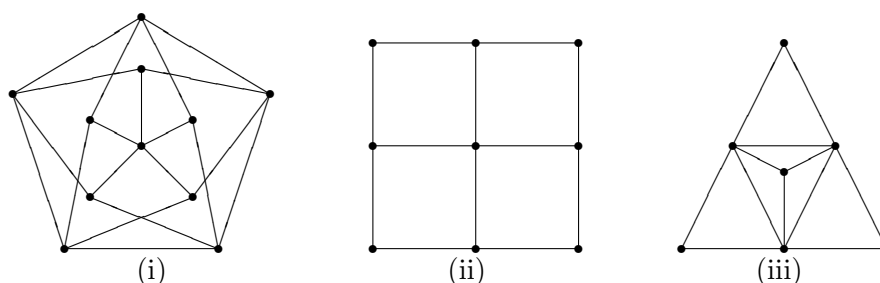
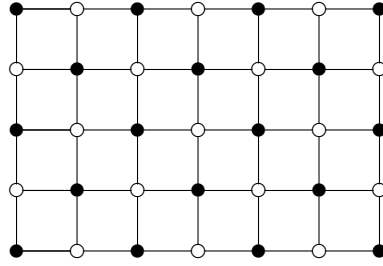


図 2.2: ハミルトン閉路を持つか

問題 2.4 要求される答は YES か NO である. しかしながら、YES の場合はある 1 通りのたどり方を示せばよいのに対し、NO の場合、いかなるたどり方をして各頂点をちょうど 1 回ずつたどる閉路が存在しないことを証明しなければならない.

問題 2.4 の (i) について. (i) はハミルトン閉路を持つ. しかし、(i) のハミルトン閉路を発見するのは結構骨の折れる問題であろう. 読者に任せることにする. (たった 11 頂点のグラフでもハミルトン閉路を探すのはたいへんなことがわかる.) ■

(ii) は格子形である. 次のようにして、奇数 \times 奇数の格子形はすべてハミルトン閉路を持たないことがわかる.



格子形は上図のように、隣接2頂点が異なる色を持つように、頂点全体が白と黒で塗れる。すなわち、2部グラフである。(この事実は定理 1.21 から導かれる。) このとき、格子形グラフのすべての閉路は白頂点と黒頂点を交互に通過するので、このグラフがハミルトン閉路を持つならば、白頂点と黒頂点の個数が一致していなければならない。つまり、次の命題が成り立つ。

命題 2.5 2部グラフ $G = (X, Y)$ がハミルトン閉路を持つならば、 $|X| = |Y|$ である。■

問題 2.4 (ii) について。(ii) のグラフは2部グラフである。そして、命題 2.5 により、奇数 \times 奇数の格子形グラフの頂点数は奇数なので、白頂点と黒頂点の個数が一致することはできない。■

(iii) のグラフは奇閉路を含むので、(ii) と同様にハミルトン閉路が存在しないことを証明できそうにない。(iii) のハミルトン性を調べるために、グラフのタフネスという概念を紹介する。(そんなことをしなくても、次数2の頂点に着目すればよいが。)

t を非負実数とする。グラフ G が、 $G - S$ が非連結になるような任意の $S \subset V(G)$ について、 $t \leq \frac{|S|}{\omega(G-S)}$ を満たすとき、 G は t -タフであるという。すなわち、任意の $s \geq t$ に対して、 G が s -タフならば t -タフである。

$$t(G) = \max\{t : G \text{ は } t\text{-タフ}\} = \min_S \frac{|S|}{\omega(G-S)}$$

を G のタフネスという。 G が非連結のとき、 $S = \emptyset$ に対して、 $\frac{|S|}{\omega(G-S)} = 0$ であり、 $t(G) = 0$ である。また、完全グラフ K_m には $\omega(K_m - S) > 1$ となる $S \subset V(K_m)$ は存在しないので、 $t(K_m) = \infty$ と定義する。

大雑把に言って、グラフ G のタフネスが高いとは、「グラフが切れにくい」ことを意味する。したがって、タフネスが高ければ、グラフの至るところに辺があることになり、結果的に、ハミルトン閉路を持ちやすい状況になっていると言える。グラフのタフネスが十分に高ければ、ハミルトン閉路を持つことが予想されている。

命題 2.6 グラフ G がハミルトン閉路を持つならば、 G は1-タフである。

証明. G が1-タフでないと仮定する。このとき、ある $S \subset V(G)$ に対して、 G から S を取り除いたグラフ $G - S$ の連結成分数は $|S|$ より多い、すなわち、 $\omega(G - S) > |S|$ 。 $G - S$ の連結成分を H_1, \dots, H_k とするとき ($k > |S|$)、どの H_i と H_j も S の頂点を經由しない限り到達できないので、すべての H_1, \dots, H_k のすべての頂点を通過するためには、 $|S|$ が足りないことになる。したがって、 G はハミルトン閉路を持たない。■

問題 2.4(iii) について。図 2.2(iii) のグラフから次数5の3頂点を取り除いたグラフは、4個の孤立点からなるグラフである。したがって、このグラフは1-タフでなく、命題 2.6 により、(iii) のグラフはハミルトン閉路を持たない。■

ペテルセン・グラフ P (図 2.3 参照) は明らかに1-タフである。(P のタフネスが $\frac{4}{3}$ であることを確かめよ。) また、以下の命題 2.7 で示すように、 P はハミルトン閉路を持たない。したがって、命題 2.7 により、1-タフという条件はハミルトン閉路の存在に十分でないことがわかる。

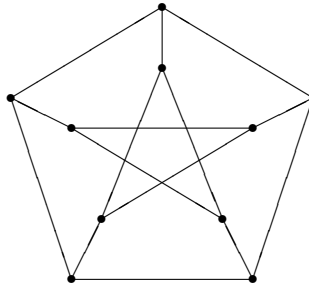


図 2.3: ペテルセン・グラフ

命題 2.7 ペテルセン・グラフはハミルトン閉路を持たない。

解答. ペテルセングラフ P の外側の五角形に含まれる 5 頂点の集合を $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ とし, 内側の星型五角形の頂点の集合を $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ とおく (ただし, すべての i について $s_i t_i \in E(P)$). P の任意のハミルトン閉路 C は, S と T を結ぶ 5 辺のうちの偶数本, すなわち, 2 本か 4 本, を通ることになる. したがって, $s_1 t_1 \in E(C), s_2 t_2 \notin E(C)$ としてよい. これにより, C のたどり方がほぼ決定される (3-正則なので, v に接続する 3 辺 e_1, e_2, e_3 のうちの 1 本, e_1 , が C に含まれないなら, e_2, e_3 の両方が C に含まれることになるので). 証明の残りは読者に残す. ■

一般には, ハミルトン閉路を持つための必要十分条件は難しく, 次の定理が最も有名な十分条件である.

定理 2.8 (オア) 頂点数 $n \geq 3$ のグラフ G が, 任意の非隣接 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

ならば, G はハミルトン閉路を持つ.

証明. 背理法を用いる. 定理の条件を満たすがハミルトン閉路を持たない辺数が極大なグラフを G とする. G の極大性から, 非隣接 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して, $G \cup \{uv\}$ はハミルトン閉路を持つので, G は u と v を結ぶハミルトン道 $x_1 x_2 \cdots x_n$ を持つ (ただし $u = x_1, v = x_n$ であるとする). ここで,

$$S = \{x_i : x_{i-1} \in N(v)\}$$

とおくと, $N(u) \cup S \subset V(G) - \{u\}$ である. 一方, 定理の条件から

$$\deg(u) + \deg(v) = |N(u)| + |S| \geq n$$

だから, $N(u)$ と S の元には重複がある. それを $x_k \in N(u) \cap S$ とおくと,

$$x_1 x_k x_{k+1} \cdots x_n x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2$$

が G のハミルトン閉路である. これは G の選び方に矛盾する. ■

この定理はハミルトン閉路を持つための非隣接 2 頂点の次数和に関して, 最良の評価を与えていることを示そう: 完全 2 部グラフ $K_{m,m+1}$ を考える. これは, 命題 2.5 により, ハミルトン閉路を持たない. $K_{m,m+1}$ の非隣接 2 頂点は同じ部集合に属するので, 非隣接 2 頂点の次数和の最小値は $2m$ である. したがって, $K_{m,m+1}$ は任意の非隣接 2 頂点 u, v に対して,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq 2m = |V(K_{m,m+1})| - 1$$

であるが, ハミルトン閉路を持たない.

次の定理はオアの定理 2.8 から直ちに得られる.

定理 2.9 (ディラク) 頂点数 $n \geq 3$ のグラフ G が, 最小次数 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ ならば, G はハミルトン閉路を持つ.

証明. G の任意の頂点 v に対して, $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ であるから, G の任意の非隣接 2 頂点 u, v に対して, $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ である. したがって, 定理 2.8 より, G はハミルトン閉路を持つ. ■

同様に, $K_{m,m+1}$ を考えれば, 最小次数がちょうど $n-1$ であるハミルトン閉路を持たないグラフになっていることがわかる. したがって, 定理 2.9 の最小次数の条件も最良であることがわかる.

第3章 マッチング

3.1 2部グラフのマッチング

図 3.1 の左は少々変形した 17 畳の部屋 R を表している (1 マスは半畳である). この部屋に 17 枚の畳を互いに重なり合うことなく, 敷き詰められるだろうか. 図 3.1 の右はこの部屋の半畳に頂点を対応させ, 隣接する半畳に対応する 2 頂点を辺で結んで得られた 34 頂点からなるグラフ G_R である. 部屋 R に畳が敷き詰められるということは, G_R に互いに端点を共有しない 17 本の辺集合が取れることと同値である. G_R は 2 部グラフであり, 各辺は白と黒の頂点を結んでいるので, そのような辺集合が選べるためには, 白頂点と黒頂点の個数が等しくなければならない. しかしながら, G_R においてはそうでないので, G_R にはそのようなまい辺集合を取ることはできないし, 部屋 R に畳を敷き詰めることはできないことがわかる.

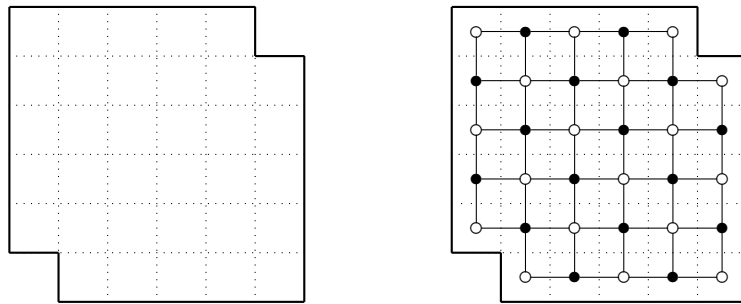


図 3.1: 部屋 R と対応するグラフ G_R

グラフ G の辺 e, e' が独立であるとは, e と e' が端点を共有しないことである. 独立辺集合 $M \subset E(G)$ をマッチングという. 辺 $uv \in M$ のとき, 頂点 u, v は M にマッチされている, または, M に被覆されているという. $|M|$ が最大るとき, M は最大マッチングという. M がすべての頂点を被覆するとき (すなわち, すべての頂点に M に含まれた辺が接続するとき), M を完全マッチングという. 明らかに, マッチング M が完全ならば最大である. しかしながら, その逆は成り立たない. 例えば, グラフ G の頂点数が奇数の場合, その最大マッチングは G の完全マッチングにはならない.

上の問題は, 与えられたグラフが完全マッチングを持つかどうかについての問題であり, その解決に以下の事実を用いた.

命題 3.1 2部グラフ $G = (X, Y)$ が完全マッチングを持つならば, $|X| = |Y|$ である. ■

一般に, 命題 3.1 の逆は成り立たない.

問題 3.2 図 3.2 のグラフ G は完全マッチングを持つか.

問題 3.2 の解答. (i), (ii) において, ある k 個の黒頂点が $k - 1$ 個以下の白頂点としかペアになれない構造が発見できるはずである. そのような構造があれば, すべての黒頂点を白頂点とペアリングするのは無理である.

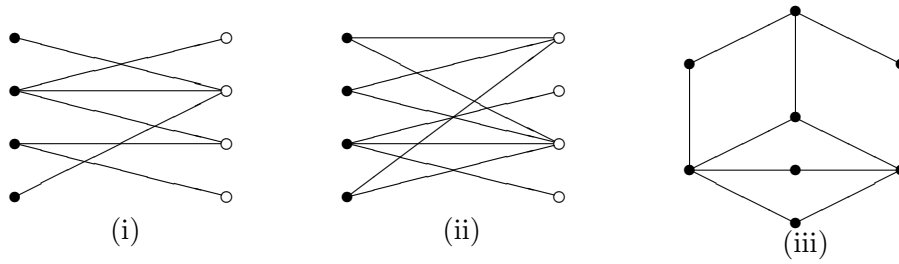


図 3.2: 完全マッチングを持つか

(iii) のグラフは, 定理 1.21 より, 2 部グラフとなる. 命題 3.1 を満たしているか. ■

問題 3.2 の (i), (ii) では, いくつかの黒頂点が少ない白頂点を取り合うという構造によって, 完全マッチングを持たないことを結論できた. 次の定理は, 2 部グラフの中の完全マッチングの存在には, そのような構造の有無が本質的であることを主張している.

定理 3.3 $G = (X, Y)$ を 2 部グラフとし, $X, Y \subset V(G)$ をその部集合とする. グラフ G が X を被覆するマッチングを持つための必要十分条件は, 任意の $S \subset X$ に対して,

$$|S| \leq |N_G(S)|$$

が成り立つことである. ただし, $N_G(S) = \bigcup_{s \in S} N_G(s)$ である.

証明の前に, 少々準備を行う. G をグラフとし, $M \subset E(G)$ をマッチングとする. G の道 $P = e_1 e_2 \cdots e_n$ (ただし $e_i \in E(G)$) において, M に含まれている辺と含まれていない辺が交互に繰り返すとき, P は M の交互道という. 交互道 $P = e_1 \cdots e_n$ の端点が M に被覆されていない場合,

$$M' = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

は G のマッチングになっており, $|M'| > |M|$ である. この操作をマッチングの交互道による拡大という.

定理 3.3 の証明. X の点をすべて被覆するマッチングがあれば, 任意の $S \subset X$ に対して,

$$|N_G(S)| \geq |\{y \in Y : \text{ある } s \in S \text{ に対して, } sy \in M\}| = |S|$$

である. したがって, 必要性は明らかである.

十分性を示すために, G の最大マッチング M が点 $u \in X$ を被覆しなかったとする. このとき,

$$S = \{x \in X : u \text{ と } x \text{ を結ぶ } M \text{ の交互道が存在する}\}$$

とおく. 特に, u に対しても, u から長さ 0 の交互道があると思えるので, $u \in S$ とする. ここで, $S = \{u, s_1, \dots, s_k\}$ とおく. このとき, 各 s_i は M の辺に被覆されているので, 各 s_i は $y_i \in Y$ とマッチされているとする. 今, ある $s \in S$ から M にマッチされていないある $y \in Y - \{y_1, \dots, y_k\}$ に対して, $sy \in E(G) - M$ が存在すれば, u と y を結ぶ M に関する交互道で, u も y も M に被覆されていないものを取りことができ, M を拡大することができる. そして, M の最大性に反する.

ゆえに, そのような sy を取ることはできない. だから, $N_G(S) = \{y_1, \dots, y_k\}$ であり,

$$k + 1 = |S| > |N_G(S)| = k$$

であり, 定理の条件に反する. ■

系 3.4 (結婚定理) $G = (X, Y)$ を $|X| = |Y|$ なる 2 部グラフとする. グラフ G が完全マッチングを持つための必要十分条件は, 任意の $S \subset X$ に対して,

$$|S| \leq |N_G(S)|$$

が成り立つことである.

証明. 定理 3.3 において, $|X| = |Y|$ とせよ. ■

何人かの生徒がいくつものクラブ活動に重複して所属している状況を考えよう. その中で, 各クラブから兼任することなく代表を選出したい. それが可能であるかどうかの条件が定理 3.3 より得られる.

すべての生徒の集合を Y とする. クラブの数がちょうど k 個あり, 各クラブに属している生徒の集合を $A_i \subset Y$ とする ($i = 1, \dots, k$). ここでの目標は, 集合族¹ $\{A_1, \dots, A_k\}$ に対して, $a_i \in A_i$ なる大きさ k の集合 $\{a_1, \dots, a_k\}$ を選ぶことに他ならない. このような $\{a_1, \dots, a_k\}$ を集合族 $\{A_1, \dots, A_k\}$ の個別代表系と呼ぶ.

グラフを用いる準備を行う. $X = \{A_1, \dots, A_k\}$ とする. そして, 生徒 $a \in Y$ がクラブ $A_i \in X$ に属しているとき, a と A_i を辺で結び, X と Y を部集合とする 2 部グラフ $B(X, Y) = G$ を構成する. このとき, X から個別代表系を選ぶことは, G において, X の頂点をすべて被覆するマッチングを見つけることに他ならない. したがって, 次の系が得られる.

系 3.5 集合族 $\{A_1, \dots, A_k\}$ が個別代表系を持つための必要十分条件は, A_1, \dots, A_k の任意の l 個の和集合が l 個以上の要素を含むことである.

少々発展的な話題について考えてみる. 定理 3.3 が各男性に 1 人の女性を対応させられる条件を与えたのに対して, 一夫多妻性の国ならどうだろうか (女性差別というなら, 男女を逆にすればよい). 次の定理は, 男性の集合 X の各男性が自分の欲しい奥さんの数を指定するとき (すなわち, 関数 $f : X \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ が指定されている), 各男性が欲しい奥さんの数だけ奥さんをもらうことができる条件を与えている.

定理 3.6 $G = (X, Y)$ を 2 部グラフとし, $f : X \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ を固定された関数とする. このとき, G の部分グラフ H で, 条件

(i) $V(H) \supset X$,

(ii) 任意の $x \in X$ に対して, $\deg_H(x) = f(x)$,

(iii) 任意の $y \in Y$ に対して, $y \in V(H)$ ならば, $\deg_H(y) = 1$,

を満たすものが存在するための必要十分条件は, 任意の $S \subset X$ に対して,

$$\sum_{x \in S} f(x) \leq |N_G(S)|$$

が成り立つことである.

任意の $x \in X$ に対して, $f(x) = 1$ なる関数 f を考えれば,

$$\sum_{x \in S} f(x) = \sum_{x \in S} 1 = |S|$$

であり, 定理 3.6 は定理 3.3 そのものである. 証明方針も定理 3.3 と全く同様に行うことができる.

¹ 集合族とは, 集合を要素とする集合を意味する.

第4章 平面グラフ

4.1 オイラーの公式

平面的グラフ (すなわち, 平面に辺の交差なく描けるグラフ) の頂点数と辺数との関係にはある制約がある. さらに, 平面的グラフの固定された平面埋め込み, すなわち, 平面グラフにおいては, 次のような頂点数, 辺数, 面数の関係が成り立つ. (平面的グラフにおいては, どのような平面への埋め込みに対しても, 面の数は不変であることもわかる.)

定理 4.1 (オイラーの公式) 連結な平面グラフ G について, 次の式が成り立つ:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

証明. 頂点数 n のグラフの辺数に関する帰納法による. 連結な平面グラフ G において, G の辺数が最小のとき, G は木であり, 命題 1.4 より, その辺数は $n - 1$ である. 木が平面に埋め込まれているときの面数は 1 であるから, $n - (n - 1) + 1 = 2$ であり, 定理の主張は成り立つ.

$|E(G)| \geq n$ のとき, G の中に全域木 T を固定し, $e \in E(G) - E(T)$ とする. $G' = G - \{e\}$ とおくと, G' は連結であるから, 帰納法の仮定により,

$$n - (|E(G')| + |F(G')|) = 2$$

が成り立つ. ここで, G' に辺 e を加えて G を復元する. このとき, e の辺に沿った両側が同一の面に属すれば, G' において, e の両端点は異なる連結成分に含まれることになり, G' が連結であることに反する. したがって, G において e の辺に沿った両側が異なる面に属することになり, $|F(G)| = |F(G')| + 1$ である. ゆえに,

$$n - |E(G)| + |F(G)| = n - (|E(G')| + 1) + (|F(G')| + 1) = 2$$

が成り立ち, 命題の証明が完結する. ■

命題 4.2 任意の平面グラフ G に対して, 次が成り立つ:

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

等号は G が極大平面グラフのときに成り立つ.

証明. G の任意の面の境界閉歩道の長さは 3 以上であるから,

$$3|F(G)| \leq 2|E(G)|$$

である (等号は G が極大平面グラフであるときに成り立つ). これをオイラーの公式に代入し, $|F(G)|$ を消去すれば, 求める式を得る. ■

命題 4.3 任意の平面グラフは次数 5 以下の点を少なくとも 4 個持つ.

証明. 命題 1.6 により, G に対角線を追加することによって, G を極大平面グラフ \tilde{G} に変形できる. V_i を \tilde{G} の次数 i の頂点数であるとすると, すべての次数は 3 以上だから, 握手補題により,

$$\sum_{i=3,4,5,\dots} V_i = |V(\tilde{G})|; \quad \sum_{i=3,4,5,\dots} iV_i = 2|E(\tilde{G})|.$$

一方, 定理 4.1 により,

$$|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F(\tilde{G})| = 2.$$

\tilde{G} のすべての面は三角形だから, $2|E(\tilde{G})| = 3|F(\tilde{G})|$ であり,

$$2|E(\tilde{G})| = 6|V(\tilde{G})| - 12$$

が成り立つ¹. さらに,

$$\sum_{i=3,4,5,\dots} iV_i = 6 \sum_{i=3,4,5,\dots} V_i - 12.$$

ゆえに,

$$\sum_{i=3,4,5,\dots} (6-i)V_i = 12.$$

$$3V_3 + 2V_4 + V_5 = 12 + \sum_{i=7,8,\dots} (i-6)V_i \geq 12$$

$$3(V_3 + V_4 + V_5) \geq 3V_3 + 2V_4 + V_5 \geq 12$$

したがって, $V_3 + V_4 + V_5 \geq 4$ である.

任意の頂点 $v \in V(G)$ に関して, $\deg_{\tilde{G}}(v) \geq \deg_G(v)$ であるから, G の次数 5 以下の頂点数も 4 個以上である. ■

命題 4.4 三角形を含まない任意の平面グラフ G は, $E(G) \leq 2|V(G)| - 4$ を満たし, 次数 3 以下の頂点を必ず持つことを証明せよ.

証明. G は三角形を含まないので, $2|E(G)| \geq 4|F(G)|$ である. これをオイラーの公式に代入して, $|F(G)|$ を消去すると, 求める式を得る. また, G の平均次数 \bar{d} は

$$\bar{d} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = 4 - \frac{8}{|V(G)|} < 4$$

である. ゆえに, G は次数 3 以下の頂点を持つ. ■

命題 4.5 K_5 と $K_{3,3}$ のどちらも平面的ではない.

証明. K_5 の頂点数と辺数はそれぞれ 5 と 10 である. これは, 命題 4.2 に反する. $K_{3,3}$ の頂点数と辺数はそれぞれ 6 と 9 である. $K_{3,3}$ は三角形を持たないことに注意すると, これは, 命題 4.4 に反する. ■

¹ 次数 5 以下の頂点の存在のみなら, 極大平面グラフを考えることなく, 次のように証明できる: 命題 4.2 より,

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12.$$

G の頂点の平均次数 \bar{d} は

$$\bar{d} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)}{|V(G)|} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq 6 - \frac{12}{|V(G)|} < 6$$

であり, 次数 5 以下の頂点が存在する. ■

4.2 正多面体

正多面体とは、各面が正多角形であり、各頂点に同数の面が集まっている凸多面体である。凸多面体は球面上のグラフと見ることができる。また、球面上のグラフは、任意に選んだ面を外領域とするような平面グラフと見ることができる。逆に、平面グラフ G の外領域を切り取り、 G の有限面からなる 2-胞体に、外領域に対応する 2-胞体を裏側から貼り付け、多少ふくらみを持たせたものは、球面上のグラフと見なすことができる。ただし、2-胞体とは、 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ に位相同型²な空間である。

次の事実は簡単なオイラーの公式の計算から得られる。正多面体に対応するグラフ G について、 G も正則であるし、 G^* も正則である。

定理 4.6 正多面体は表 4.1 の 5 種類しか存在しない。

証明. 正多面体の定義から、 G は各面が p 角形である q -正則平面グラフであるとする。 G に 2 角形や次数 2 の頂点があれば、 P を平らな面により構成できないので、 $p, q \geq 3$ である。

G に対して、オイラーの公式が成り立つ：

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

$q|V(G)| = p|F(G)| = 2|E(G)|$ を代入して整理すると、

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{|E(G)|} \cdots \cdots (*)$$

が得られる。 $(*)$ は p と q に関して対称なので、 $p \geq q$ としてよい。 $q \geq 4$ ならば、 $(*)$ の左辺が正でなくなるので、 $q = 3$ である。したがって、

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{|E(G)|}$$

となり、これを満たす p は $p = 3, 4, 5$ である。このとき、それぞれ $|E(G)| = 6, 12, 30$ である。そのそれぞれについて、対応する正多面体が実際に構成できる。(表 4.1, 図 4.1 参照.) ■

表 4.1: 正多面体

p	q	$ E(G) $	多面体
3	3	6	正四面体
3	4	12	正八面体
4	3	12	正六面体
3	5	30	正二十面体
5	3	30	正十二面体

正四面体グラフと正八面体グラフは双対グラフの関係にあり、正十二面体グラフと正二十面体グラフも同様の関係になっていることがわかる。

定理 4.7 平面グラフ G の全域木からなる集合 $\mathcal{T}(G)$ と G^* の全域木からなる集合 $\mathcal{T}'(G)$ との間には全単射が存在する。(すなわち、 $|\mathcal{T}(G)| = |\mathcal{T}'(G)|$ である.)

² 位相空間 X と Y が位相同型であるとは、連続であり、逆像もまた連続な写像 $\phi : X \rightarrow Y$ が存在することである。そのような写像 ϕ を同相写像という。

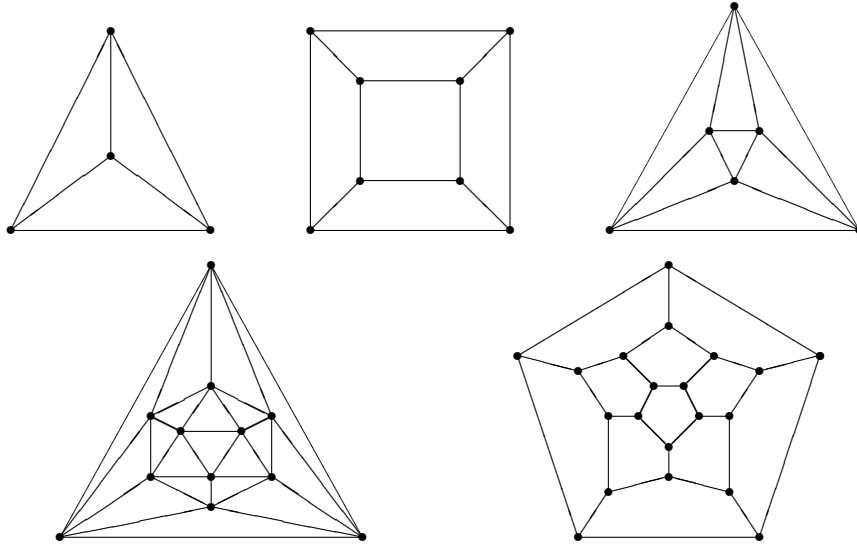


図 4.1: 正多面体グラフ

証明. G の全域木 T を固定し, G^* の全域部分グラフ T^* を次のように定める:

$$E(T^*) = \{e^* : e \notin E(T)\}.$$

ただし, $e \in E(T)$ に対する $e^* \in E(G^*)$ の定義については, 双対グラフの定義を参照せよ (命題 1.9). このとき, T^* が連結で, 閉路を含まないことを証明すればよい.

T は木なので, T に対応する面は 1 つである. したがって, G の任意の 2 つの面 $F, F' \in F(G)$ は, T の辺を横切ることなく, G の面をたどって到達可能である. ゆえに, T^* は連結である. T^* が閉路 C^* を持つなら, T^* において C^* の内側の面の F^* と外側の面 F'^* が存在する. F^* と F'^* は C^* を横切ることなく, G^* の面をたどって到達不可能である. このことは T が非連結であることを意味する. よって, $T^* \subset G^*$ は全域木である.

さらに, G^* の双対グラフは G 自身であり, 上の定義から $(T^*)^* = T$ であることがわかる. ■

さて, 立方体の異なる展開図の総数を求めてみよう. ただし, 回転や裏返しで重なり合う展開図は同じと見なすこととする. (この手の問題を唐突に発問すると, どうやったらよいかわからないという学生が多数現れる.) 何かある観点を設定して, 注意深く列挙するという態度が重要である. その観点として, 展開図中の一直線に並ぶ正方形の個数に着目しよう. (何か別の観点は設定できるのか?) 立方体の展開図 T の一直線に並んだ正方形の最大個数を $\ell(T)$ と表す. 明らかに, 任意の T に対して, $2 \leq \ell(T) \leq 4$ である.

命題 4.8 図 4.2 のように, 立方体の展開図は 11 個存在する.

図 4.2 の展開図 T について, $\ell(T) = 4$ なるものが 6 個, $\ell(T) = 3$ なるものが 3 個, $\ell(T) = 2$ なるものが 1 個である. また, 立方体の展開図 T を固定すると, 立方体グラフの双対グラフの全域木, すなわち, 正八面体グラフの全域木がちょうど 1 つ決まることがわかる (図 4.3 参照). ここで, 正八面体グラフ上で互いに重なり合う³ 全域木は, 立方体の同一の展開図に対応していることに注意せよ. また, 正八面体グラフの全域木を 1 つ固定すると, それに対応する立方体の展開図が 1 つ決まる.

したがって, 上の考察により, 次の命題が成り立つ:

³ 正八面体グラフ H の全域木の $T, T' \subset H$ が重なり合うとは, T と T' の同型写像 $\sigma : T \rightarrow T'$ で, H の自己同型写像に拡張できるものが存在することである.

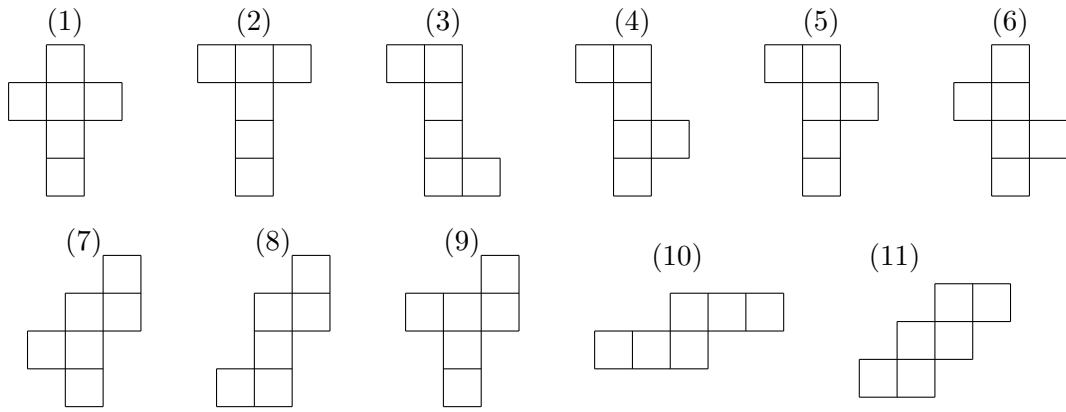


図 4.2: 立方体のすべての展開図

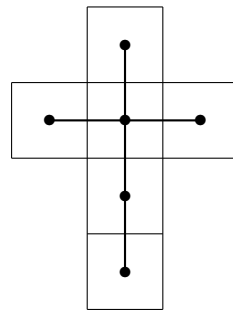


図 4.3: 立方体の展開図と正八面体グラフの全域木

命題 4.9 立方体の展開図の総数は正八面体グラフの互いに重なり合わない全域木の総数に等しい.

■

ここで, 定理 4.7 を用いると, 立方体グラフと正八面体グラフは互いに双対グラフの関係にあるので, 全域木の総数は等しい. そして, 正八面体グラフの全域木 T, T' が互いに重なり合えば, 定理 4.7 で対応させた立方体グラフの全域木 T^*, T'^* も立方体グラフの中で互いに重なり合うので, 次の命題が得られる:

命題 4.10 正八面体グラフの互いに重ならない全域木の総数は, 立方体グラフの互いに重ならない全域木の総数に等しい.

系 4.11 立方体の展開図の総数と正八面体の展開図の総数は一致する. また, 正二十面体と正十二面体は同数の展開図を持つ.

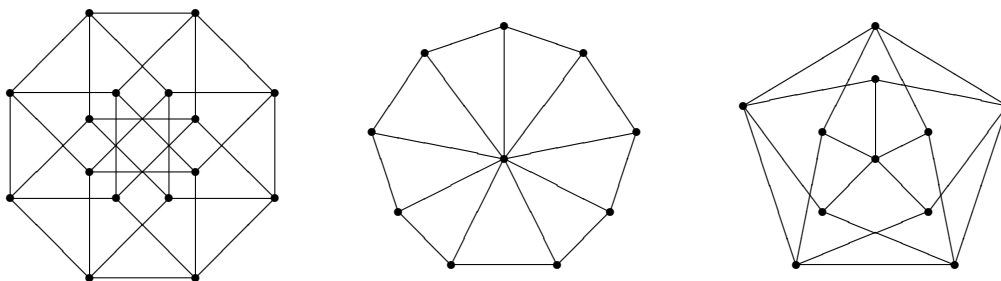
証明. 正六面体 Q , すなわち立方体, を展開することは, Q に対応するグラフの双対グラフ G^* の全域木を選ぶことである. したがって, 定理 4.7 により, 互いに双対グラフの関係にある凸多面体の展開図の総数は等しい. ■

第5章 彩色問題

5.1 抽象グラフの彩色

グラフ G の k -彩色とは、 G のどの隣接 2 点も異なる色を持つような k 色による G の頂点の色付けを意味する。グラフ G が k -彩色可能であるとは、 G が k -彩色を持つことである。 G の染色数 $\chi(G)$ とは、 G の彩色に必要な最小色数である。

問題 5.1 次のグラフの染色数を求めよ。(注意. 染色数は最小色数なので、 $\chi(G) = k$ と答えるとき、 G が k -彩色可能であり、かつ、 $(k-1)$ -彩色可能でないことを証明しなければならない.)



命題 5.2 辺数 m のグラフ G に対して、次の式が成り立つ:

$$\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}.$$

(G が完全グラフのとき、等号が成り立つ.)

証明. G の染色数を k とおき、 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ を $V(G)$ の分割とする。ただし、各 V_i は色 i で塗られた頂点集合である ($i = 1, \dots, k$)。任意の相異なる i, j に対して、ある $v_i \in V_i$ と $v_j \in V_j$ が存在して、 $v_i v_j \in E(G)$ である。そうでなければ、 $V_i \cup V_j$ を同色で塗ることができ、 $\chi(G) = k$ であることに反する。したがって、

$$m \geq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

であり、これを k について解けば、命題に与えた式が得られる。■

命題 5.3 任意のグラフ G について、 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ である。完全グラフと長さ奇数の閉路が等号を満たす。

証明. グラフは単純であるとしてよい。頂点数に関する帰納法を用いる。頂点数が 1 のとき、最大次数 0 であり、命題は成り立つ。今、“ $\Delta(G) \leq k$ ならば、 $\chi(G) \leq k + 1$ である”を証明する。グラフ G の任意の点 v を取り除き、 $G' = G - v$ とおく。 $\Delta(G') \leq \Delta(G) \leq k$ だから、帰納法の仮定により、 $\chi(G') \leq k + 1$ である。また、 $|N_G(v)| \leq k$ だから、たとえ $N_G(v)$ に k 色すべてが現れていても、 v に残りの 1 色を使うことができる。したがって、 $\chi(G) \leq k + 1$ である。■

ここで、グラフの彩色の応用を考えることにする。図 5.1 の左は交差点における車の進行方向を示したものである。この交差点では、図に示した以外に向かう車はないとする。この交差点に信号を設置したい。そして、その信号の周期をなるべく小さくして、効率良く車を流したい。

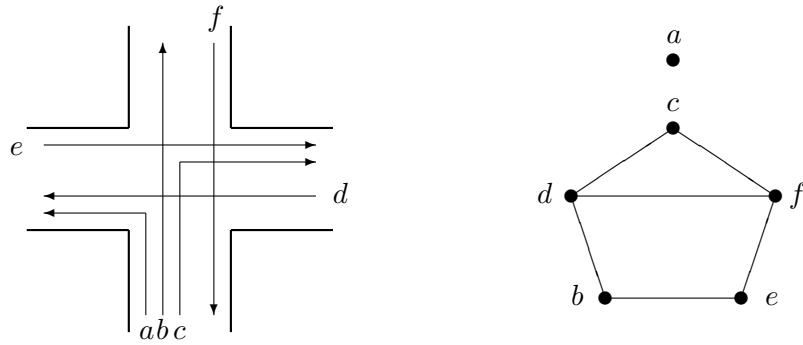


図 5.1: 進行方向の関係とそのグラフ

そこで、各進行方向を頂点で表し、それらが交わる時に辺で結ぶことにし、グラフ G を構成する。(図 5.1 の右図参照。) 交わらない進行経路の信号は同時に青にしてもよいが、交わっている方向の信号を同時に青にはできない。この事実を考えると、 G の隣接する頂点を異なる色で塗る G の色付け、すなわち G の彩色、に対応する信号の設定が可能であることがわかる。したがって、信号の周期を $\chi(G)$ にするのが 1 番効率的であり、それ以下にできない。

5.2 平面グラフの彩色

平面グラフの彩色に対して、次の有名な定理がある。この定理は“四色定理¹”と呼ばれている。

定理 5.4 (四色定理) 任意の平面地図は隣接する国が異なる色を持つように、4 色で塗り分けることができる。

これは平面グラフ G の互いに辺で接する面を異なる色になるように、面全体を 4 色で塗り分けられることを主張するものである。しかし、その双対グラフを考えると、辺で接する 2 つの国は隣接した 2 頂点に対応するので、上の四色定理は次のグラフの頂点彩色の定理へと翻訳できる。

定理 5.5 (四色定理, アッペルとハーケン) 任意の平面グラフは 4-彩色可能である。■

4 色で塗ることはたいへん難しいが、6 色で塗れることなら、直ちに示すことができる。

命題 5.6 任意の平面グラフは 6-彩色可能である。

解答. 頂点数に関する帰納法を用いる。頂点数が 6 以下のとき、定理は成り立つ。命題 4.3 より、任意の平面グラフ G は次数 5 以下の頂点 v を持つ。帰納法の仮定から、 $G - \{v\}$ は 6-彩色可能である。 G における v の近傍は 5 つ以下なので、6 色持っていれば、 v にすべての近傍の色と異なる色を塗ることができる。■

命題 5.6 の証明において、もう少し頑張れば、色数を 1 つ減らすことができる。

定理 5.7 任意の平面グラフは 5-彩色可能である。

¹ 1852 年、フランシス・ガスリーはこの四色問題をケンブリッジの数学科の学生である弟に質問した。そして、1878 年にケーリーがロンドン数学会にこの問題を提出し、世に広まることになった。1 年後、ケンベが間違った証明を与え、18 年間信じられていた。しかし、その後ヒューウッドが間違いを指摘し、五色定理を証明した。終に 1977 年、アッペルとハーケンにより、四色定理は終に証明された。この定理の証明方針は単純であるが、その証明では、1482 個の場合分けを潰すため、コンピュータを長い時間動かしている。現在では、同じアイデアによる、短い証明も与えられているが、依然としてコンピュータが使われている。

証明. 頂点数が少なければ明らかである. 平面グラフ G は, 命題 4.3 により, 次数 5 以下の頂点 v を持つ. 帰納法の仮定により, $G' = G - \{v\}$ は 5-彩色可能である. v の次数が 4 以下なら, 命題 5.6 と同様に G の 5-彩色が構成できる. 唯一うまくいかない場合は, $\deg_G(v) = 5$ であり, かつ, v の近傍 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 のすべてが G' の彩色において, 異なる色で塗られている場合である. このとき, G' において頂点 v_i は色 i で塗られているとする ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

もし, G' の 5-彩色において, 頂点 v_1 の色を 3 に塗りかえることができれば, 頂点 v に色 1 を塗ることができ, G の 5-彩色が完成する. もし, v_1 が 3 で塗られた頂点に隣接してなければ, v_1 を 3 で塗ることができる. したがって, v_1 は 3 で塗られた頂点に隣接している. もしも, この 3 で塗られた頂点のすべてが 1 で塗られた頂点に隣接していなければ, v_1 に塗られた色 1 と, v_1 に隣接する 3 で塗られた頂点の色を交換することにより, v に色 1 を塗ることができる. したがって, このような色の塗り替えができないのは, v, v_1 を通り, 3 で塗られた頂点と 1 で塗られた頂点を交互にたどり v_3 に到達し, v に戻る閉路が存在するときである. これを (1, 3)-ケンペ鎖という.

さて, ここで v_2 を 4 で塗りかえられるかどうかを考える. 前の議論と同様に, それができれば v を 2 で塗ることができ, G の 5-彩色ができあがる. v_2 を 4 で塗りかえられないのは, (2, 4)-ケンペ鎖が存在するときのみであるが, v_2 と v_4 は (1, 3)-ケンペ鎖の内側と外側に含まれるので, (2, 4)-ケンペ鎖は存在することができない. したがって, v_2 は 4 で塗ることができ, G の 5-彩色を構成することができる. ■

グラフ G が外平面的であるとは, G をすべての頂点が外領域に接する同一の閉路に載っている平面グラフとして, 平面に埋め込めることである. このように埋め込まれた平面グラフを外平面グラフという. 外平面グラフ G における外領域に接する閉路を G の境界という.

命題 5.8 任意の外平面グラフは 3-彩色可能である.

証明. 外平面グラフのある有限面が三角形でないとき, それに対角線を加えて, 三角形にできるので, 有限面がすべて三角形の外平面グラフ G について (これを極大外平面グラフという), 3-彩色可能であることが証明できれば, もとの外平面グラフも 3-彩色可能であることがわかる.

まず, 極大外平面グラフ G は, 境界上に指定した任意の辺 e に対して, e の端点以外に次数 2 の頂点を持つことを証明する: 頂点数 n に関する帰納法を用いる. $n = 3$ のとき, 明らかに主張は成り立つ. $n \geq 4$ のとき, G は境界に含まれない辺 f をもつ. このとき, G は f のみを共有する 2 つの極大外平面グラフ H と K に分解できる. 帰納法の仮定により, H と K は f の端点以外に次数 2 の頂点 v_H と v_K を持つ. G において, v_H と v_K は非隣接であるから, G の境界上に任意に指定した辺 e に対して, e の端点以外の次数 2 の頂点が存在する.

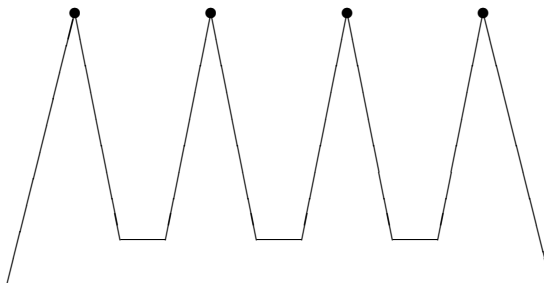
G を $n \geq 3$ 頂点の極大外平面グラフとする. $n = 3$ のとき, 明らかに 3-彩色可能である. $n \geq 4$ のとき, G は次数 2 の頂点 v を持つので, $G' = G - \{v\}$ を考える. G' も再び極大外平面グラフであるから, 帰納法の仮定により, G' は 3-彩色可能である. v にその 2 つの近傍に現れてない色を塗ることにより, G の 3-彩色が得られる. ■

命題 5.8 の系を用いて, 次の問題の解答を与える.

問題 5.9 (美術館問題) n 角形の博物館がある. そこに監視カメラを置き, 防犯の対策を取りたい. どんない凸とは限らない n 角形の博物館でも, すべての場所を監視するには, 最低何台の監視カメラを設置すればよいか.

注意. 当然, n 角形のすべての角に監視カメラを置けば, 博物館の内部のどの場所も監視できる. 本当に n 個の監視カメラが必要な n 角形の博物館が存在するのだろうか. 上の問題では, 任意の n 角形博物館を見張る監視カメラの最小台数を問題にしている.

解答. 考える n 角形に適当に対角線を追加すると, 外領域が n 角形の極大外平面グラフ G が得られる. 命題 5.8 により, G は 3-彩色可能である. したがって, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 以下の同色の頂点が存在する. これらの頂点の場所に監視カメラを置く. 博物館の内部の任意の場所は G のある三角形の中に含まれ, さらに, その三角形の境界にはすべての色の頂点が現れているから, 高々 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 個の監視カメラで博物館全体を見張ることができる.



上の 12 角形の博物館において, 4 つの黒頂点を置いた部分がある. 1 台の監視カメラでこのうちの 2 つ以上を同時に監視することはできない. したがって, この 12 角形の博物館を見張るためには, 4 台以上の監視カメラが必要である. この例により, 任意の $n \equiv 0 \pmod{3}$ についての例が構成できるであろう. ゆえに, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 台の監視カメラが必要な n 角形博物館が存在し, 上の評価 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ が最良であることを示せた. ■